

立教大学数理物理学研究センター  
Lecture Notes Volume 3

# クラスター代数入門

井上玲（千葉大学）述  
神保道夫（立教大学）記

2016年4月

# クラスター代数入門

井上玲 述  
神保道夫 記

井上玲

千葉大学大学院理学研究科

基盤理学専攻 数学・情報数理学コース

〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町1-3-3

神保道夫

立教大学理学部

数理物理学研究センター

〒171-8501 東京都豊島区西池袋3-34-1

## はしがき

この講義録は、2015年11～12月に立教大学で行った講義がもとになっています。講義は週1度2コマずつ行われ、学生からの質問も多く、その場で回答できずに次回までの宿題になったことも何度かありました。私にとってたいへんよい修行になりました。

講義の機会を与えて下さり、そして講義録を執筆して下さいました神保道夫先生に心より感謝申し上げます。

私が初めてクラスター代数に出会ったのは2008年夏です。中西知樹さんの音頭で国場敦夫さん、鈴木淳史さんと共に名古屋大学へ集まり、Tシステム、Yシステムの周期性予想を証明するプロジェクトが発足したのです。その後、伊山修さんとBernhard Kellerさんも加わって下さり、多くのことを学びました。そして、クラスター代数の幾何的な側面に出会ったのが樋上和弘さんとの共同研究です。一度関わってみたいと思っていた結び目に少し触れることが出来ました。改めて、共同研究をして下さった方々、議論をして下さった方々にお礼申し上げます。

クラスター代数は実に様々な分野と関係があるようで、これからも何か面白い発見ができるといいなと思っています。

この講義録がクラスター代数に興味をお持ちの方々のお役に立てば幸いです。

2016年4月

井上 玲

## 目次

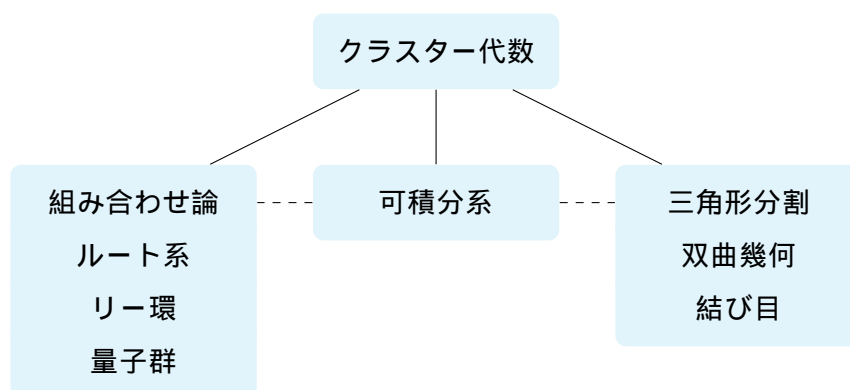
<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
1.1	Conway-Coxeter frieze . . . . .	2
1.2	多角形の対角線 . . . . .	6
<b>2</b>	<b>クラスター代数</b>	<b>7</b>
2.1	(係数なし)クラスター代数 . . . . .	7
2.2	ルート系 (rank 2) . . . . .	15
2.3	一般のルート系 . . . . .	18
2.4	ルート系の分類 . . . . .	20
2.5	定理 2.2 について . . . . .	26
2.6	係数つきクラスター代数 . . . . .	32
<b>3</b>	<b>差分方程式への応用</b>	<b>37</b>
3.1	Somos 4 . . . . .	37
3.2	$T$ システムと $Y$ システム . . . . .	39
<b>4</b>	<b>双曲幾何への応用</b>	<b>44</b>
4.1	点つき曲面の三角形分割 . . . . .	44
4.2	2次元双曲幾何 . . . . .	48
4.3	3次元双曲幾何 . . . . .	51
4.4	$S^1$ 上の1点穴あきトーラス束 . . . . .	56
4.5	$R$ 作用素 . . . . .	59

# 1 はじめに

この講義では「クラスター代数」というものについてお話しします。英語では Cluster Algebra, cluster は「かたまり」という意味です。日本語で「団代数」と呼ぶ人たちもいます。この講義ではクラスター代数と呼び、以下 CA と略します。

CA は可換環の一種なのですが、非常に新しいもので、2000 年頃ロシアの数学者 Fomin と Zelevinsky の 2 人が発見しました。こういうものが突然でできたわけではなくて、もともとはいろいろな数学的なことを調べたいという動機から考えられたのです。どうして CA が面白いと思われているのか、背景を簡単に説明しましょう。

CA は組み合わせ的な話と非常に相性がいいのです。平面のタイル貼りなどのような素朴な問題を扱くとルート系がでてきますが、そこからリー環・量子群などの代数的な構造と関係します。一方で幾何的なものともつながっていて、点つき曲面の三角形分割（これはとても面白くて何も知らなくてもわかります）、さらに計量をいれると双曲幾何（2次元と3次元）や、結び目にも関係します。数理物理学にでてくる可積分系はこの両方につながっていますが、それ自身 CA と関わります。



こういった対象を研究する道具として CA は非常に優れているので、世界中で使っている人が沢山いるというのがここ 10 年ほどの状況です。

この講義では特に次の話題を扱います。

- [1] ルート系との関係
- [2] 可積分系への応用
- [3] 曲面の分割・双曲幾何への応用

[1] は代数ですが、代数サイドはこれ以上深入りしないことにします。[2] についてはちょっとだけ触れる程度です。[3] はある程度掘り下げてお話しします。いろんな数学が（解析は出てこないですが、代数と幾何が）出てきますが、前提とする知識は「なし」。数学の基本的な事がわかっているれば理解できるように配慮します。

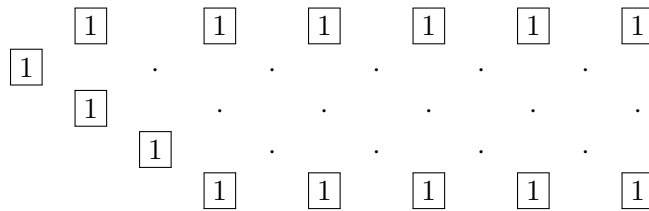
## 1.1 Conway-Coxeter frieze

まず, Conway-Coxeter frieze と呼ばれる小学生でもわかるゲームをお話します. frieze というのは「つづれ模様」.ギリシャの神殿などに見られる, 帯状に繰り返されるパターンのことです.



図 1: Frieze

Example 1.1. 図のようなパターンに数字を入れて行くゲームを考えます.



最上段と最下段はつねに 1 とします. 四角で囲った  $\boxed{1}$  はその位置の数字を 1 に固定することをあらわします. 点を打った部分には, 数字を次の規則で並べて行きます.

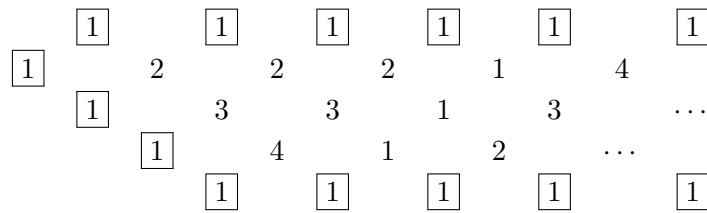
$$\begin{array}{c}
 a \\
 b \quad c \\
 d
 \end{array}
 \text{ の形に並んだ数字は } bc = ad + 1 \text{ を満たす}$$

つまり  $a, b, d$  がわかっているとき  $c$  を

$$c = \frac{ad + 1}{b} \tag{1.1}$$

と決めればよいわけです.

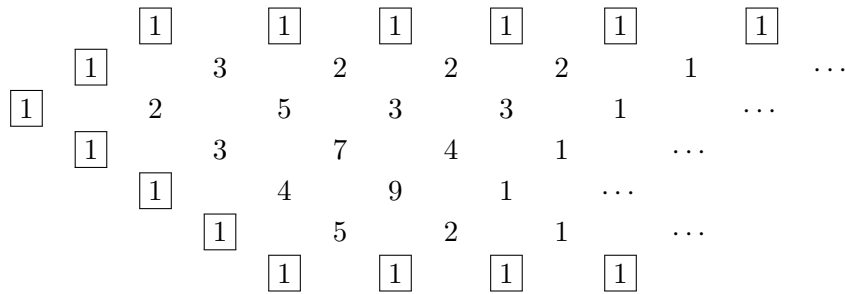
実際にやってみると



となっていくます。しばらくやっていると、数字が全部 1 に戻って来ていますね。そのあとさらに続けるには、対称性から図形をひっくり返してならべればよい。だから *frieze* の形になっているわけです。さらに、出てくる数字は全部整数になっていますね。規則 (1.1) を使って計算するので、一見分母があっても不思議はないのですが、実は分数はでてこない。□

これはあまりに簡単な例なのでまぐれに見えるかも知れませんが、もう少し複雑な例をあげてみましょう。

Example 1.2. 左端は形を変えることもできます。



やっぱり 1 に戻ってきましたね。数字が大きくなっていくので、だんだんと割り切れるごとに「すごい！」という気がしてきます。(自分で計算してみないと感動が薄いかもしれません。) □

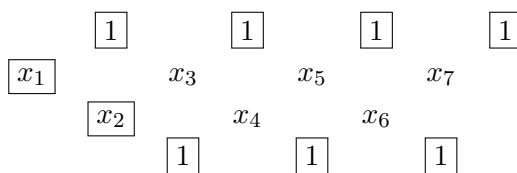
まとめるとつぎのことが観察されました。

Fact.

- (1) 現れる数は ( 正の ) 整数
- (2) しばらくやっているうちに再び 1 が並ぶ

□

Example 1.3. 今度は左端の数字を文字にしてみます。あまり複雑だと大変なので、上下をのぞいた中間の行の数  $n$  を  $n = 2$  とします。





図のように変数に番号を振って同じ規則に従って計算すると、順番に

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_4 &= \frac{x_3 + 1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2}, \\ x_5 &= \frac{x_4 + 1}{x_3} = \frac{x_1 + 1}{x_2}, \\ x_6 &= \frac{x_5 + 1}{x_4} = x_1, & x_7 &= \frac{x_6 + 1}{x_5} = x_2 \end{aligned}$$

となって、もとの変数  $x_1, x_2$  に戻ってきました。もうひとつポイントは、ちゃんと約分できること。  $x_3, x_4, x_5$  は整理したときに分母が  $x_1, x_2$  の単項式になっている。だから  $x_1 = x_2 = 1$  を代入すると整数になるわけです。分母が単項式であるような有理式を *Laurent* 多項式といいます。  $\square$

まとめると、左端の  $x_1, \dots, x_n$  を変数としたとき

**Fact.**

- (1) 現れる  $x_k$  ( $k > n$ ) は  $x_1, \dots, x_n$  の *Laurent* 多項式になる
- (2) そのうちに再び  $x_1, \dots, x_n$  が並ぶ
- (3)  $x_1, \dots, x_n$  にはさまれた領域にあらわれる *Laurent* 多項式の分母はすべて相異なる単項式になる

ちなみに (3) の異なる単項式の総数は  $n(n+1)/2$  になることが知られています。  $\square$

不思議な事がおこっているわけですが、何が本質的なのでしょうか。それを調べるために、こういう性質を保ったままでルールをどこまで変更できるのかを考えてみましょう。ひとまず  $n = 2$  の範囲でやります。

**Example 1.4.**  $d_1, d_2 \geq 1$  を固定して、例 1.3 と同じ図

$$\begin{array}{ccccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ \boxed{x_1} & & x_3 & & x_5 & & x_7 & \cdots \\ & \boxed{x_2} & & x_4 & & x_6 & & \cdots \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \cdots \end{array}$$

において

$$x_{2k+1} = \frac{x_{2k}^{d_1} + 1}{x_{2k-1}}, \quad x_{2k+2} = \frac{x_{2k+1}^{d_2} + 1}{x_{2k}},$$

という規則で計算してみましょう。

$(d_1, d_2) = (1, 2)$ :

$$x_3 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{x_3^2 + 1}{x_2} = \frac{(x_2 + 1)^2 + x_1^2}{x_1 x_2},$$

$$x_5 = \frac{x_4 + 1}{x_3} = \frac{x_1^2 + x_2 + 1}{x_1 x_2}, \quad x_6 = \frac{x_5^2 + 1}{x_4},$$

$$x_7 = x_1, \quad x_8 = x_2$$

となって戻ってきました。分母はすべて異なっていることもわかります。

もう少し他の例をやってみましょう。簡単のため  $x_1 = x_2 = 1$  を代入して計算します。

$(d_1, d_2) = (1, 3)$ :

$$\begin{array}{cccccc} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ \boxed{1} & & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 & \\ & \boxed{1} & & & 9 & & 14 & & 2 & & 1 \\ & & \boxed{1} & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \end{array}$$

これも 1 に戻ってきていて、うまくいっていいそうです。

$(d_1, d_2) = (1, 4)$ :

$$\begin{array}{cccccc} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ \boxed{1} & & & 2 & & 9 & & 43 & & 206 \\ & \boxed{1} & & & 17 & & 386 & & 8857 \\ & & \boxed{1} & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

この例では、割り切れることは相変わらず正しいですが、今度は戻ってきそうにありませんね。（もう手では大変なので電卓で計算しました。）実際、この数列は単調に増加していくことが示せます。

$(d_1, d_2) = (2, 2)$ :

$$\begin{array}{cccccc} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ \boxed{1} & & & 2 & & 13 & & 89 & & 610 \\ & \boxed{1} & & & 5 & & 34 & & 233 & & 1597 \\ & & \boxed{1} & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

この場合も戻ってきそうにありません。

□

観察をまとめると

Fact.

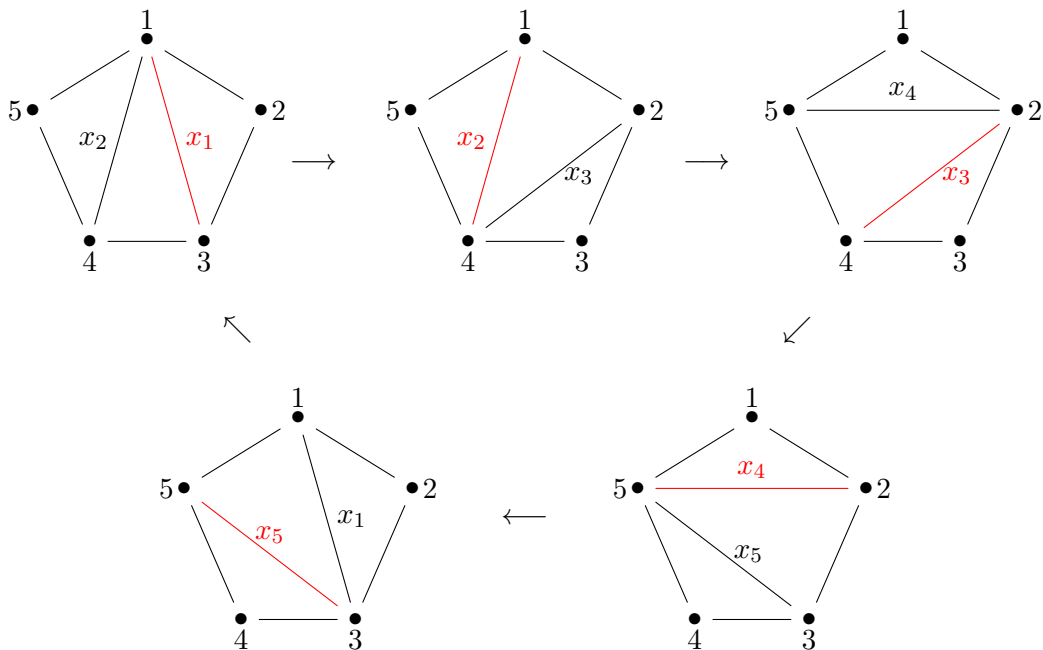
- (1) すべての  $x_k$  たちは  $x_1, x_2$  の Laurent 多項式になる
- (2)  $(d_1, d_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$  の場合 (および  $d_1$  と  $d_2$  の役割を取り替えた場合) 以外は  $x_1, x_2$  には戻ってこない

□

## 1.2 多角形の対角線

CA の幾何的な背景を説明します.

Example 1.5. 5角形に対角線を引いて3角形に分割するやりかたを考えてみましょう. 対角線に  $x_1, x_2, \dots$  のように名前をつけ, 対角線の引き方を順に変えて行くと図のようになります. 5回目でもとに戻りますね.



これは frieze で  $n = 2$ ,  $(d_1, d_2) = (1, 1)$  とした場合と似ています. この例はあとで 4.1 節の双曲幾何に再登場しますが, そこでは  $x_1, x_2$  に対してある種の「長さ」という解釈が与えられます.

□

一般に次のような事情になっています.

Fact.

- $(n + 3)$  角形の三角形分割と  $n$  行の frieze とが対応する

□

Q 1. 上の *Example 1.3* において  $n = 3$  とした場合に, 登場する  $x_k$  をすべて書きあらわせ. また, どのステップで元に戻るかを調べよ.

## 2 クラスター代数

### 2.1 (係数なし) クラスター代数

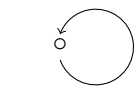
クラスター代数を定義するためにいくつか言葉を準備しましょう.

有限個の頂点と辺を持つグラフであって, 各辺に向きと正の整数の重みがついたものを有限 quiver といいます. (quiver は日本語で籐 (えびら) といいます. 矢筒のことです.)



有限 quiver の例

ただし 1 ループと 2 サイクルは禁止します.

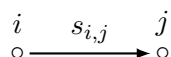


1 ループ



2 サイクル

今後 quiver を  $Q$ , 頂点の集合を  $I = \{1, \dots, n\}$ , 頂点  $i \in I$  から  $j \in I$  へ向かう辺の重みを  $s_{i,j}$  であらわします.



便宜上  $i, j$  を結ぶ辺がない場合には  $s_{i,j} = 0$  とし, また  $s_{i,j} < 0$  の場合には  $j$  から  $i$  へ向かう辺に重み  $-s_{i,j}$  がついているものと約束します.

$$\begin{array}{c} i & & j & & & & i & & j & & & & i & & -1 & & j & & & & i & & 1 & & j \\ \circ & \xrightarrow{0} & \circ & = & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & \xleftarrow{-1} & \circ & = & \circ & \xrightarrow{1} & \circ \end{array}$$

以下では  $s_{i,j}$  を辺の多重度と解釈して、グラフに重みを書き込む代わりに  $i$  から  $j$  へ向かう辺を  $s_{i,j}$  本描く、というやり方も使う事にします。

quiver の頂点集合でラベルされた変数の組  $x = (x_1, \dots, x_n)$  をクラスター、それぞれの  $x_i$  をクラスター変数と言います。これらは可換かつ代数的に独立な変数とします。quiver とクラスター変数の組  $(Q, x)$  を a seed (種) と呼びます。

頂点  $k \in I$  をひとつ決めて、seed  $(Q, x)$  から新たな seed  $(Q', x')$  を作る mutation (変異) という操作を導入しましょう。

**Definition 2.1.** seed  $(Q, x)$  の  $k \in I$  における mutation  $\mu_k(Q, x) = (Q', x')$  を次のように定める。

- $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  の定め方

$$x'_i = \begin{cases} \frac{1}{x_k} \left( \prod_{j \rightarrow k} x_j^{s_{j,k}} + \prod_{j \leftarrow k} x_j^{s_{k,j}} \right) & (i = k) \\ x_i & (i \neq k) \end{cases}$$

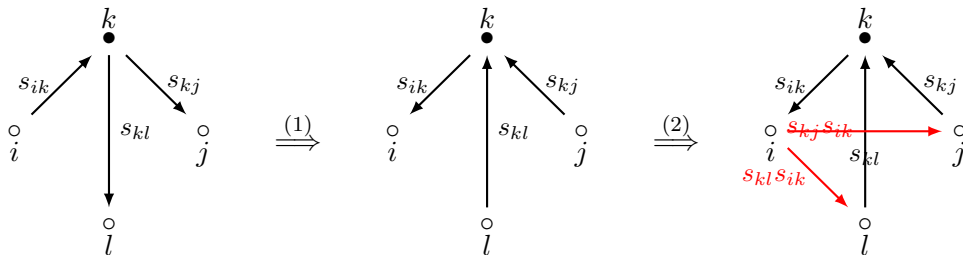
ここで  $\prod_{j \rightarrow k}$  は  $j$  から  $k$  に向かう辺があるような頂点  $j$  についての積、 $\prod_{j \leftarrow k}$  は  $k$  から  $j$  に向かう辺があるような頂点  $j$  についての積をあらわす。そのような頂点が無いときは積を 1 とする。

- $Q'$  の定め方

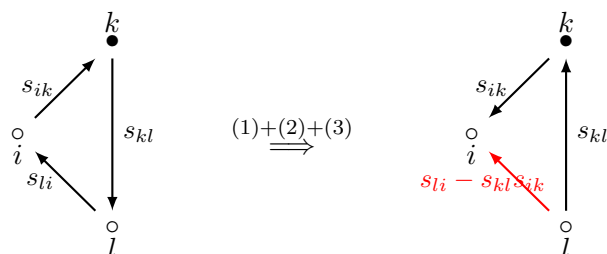
- (1) まず  $k$  に出入りする矢印の向きを全部逆にする (重み  $s_{ij}$  はそのままにする)。
- (2) (1) のあとで、 $k$  に入って出る矢印のペア  $j \rightarrow k \rightarrow i$  があるごとに矢印  $i \rightarrow j$  を加え、 $s_{k,j}s_{i,k}$  をその重みとする。
- (3) (2) の結果をそれ以外の矢印と重ね合わせる。

□

操作 (2) で付け加える矢印の向きは「三角形が回る」ようにつけられています。



操作 (3) が少し分かりにくいので例を示します.



上の操作で  $Q'$  は明らかに有限 quiver になりますが,  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  がクラスターになることも確かめられ, したがって  $(Q', x')$  は再び seed になります.

さて  $(Q, x)$  をひとつ固定し, これを the initial seed とよぶことにします. initial seed に mutation をあらゆる仕方でも有限回施して得られる seed たち  $(Q'', x'')$  をすべて考え, これら  $x''_k$  たちで生成される  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  の  $\mathbb{Z}$  部分代数を  $\mathcal{A}(Q, x)$  とします. つまり  $\mathcal{A}(Q, x)$  は  $x''_k$  たちをすべて含み, かつ

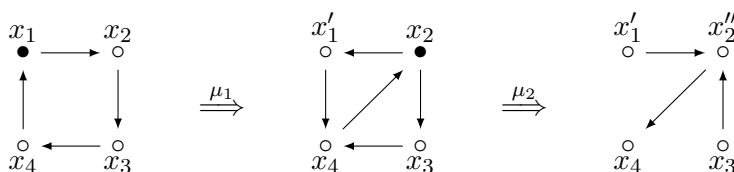
$$p_1, p_2 \in \mathcal{A}(Q, x), c_1, c_2 \in \mathbb{Z} \implies c_1 p_1 + c_2 p_2 \in \mathcal{A}(Q, x), c_1 p_1 p_2 \in \mathcal{A}(Q, x)$$

が成り立つような最小の集合です. この  $\mathcal{A}(Q, x)$  を, initial seed  $(Q, x)$  から定まるクラスター代数と呼びます.

一般に mutation によって実際にどんな seed が現れるのかを知るのには難しいことです. 有限個の seed しか現れないのはどういう場合かを調べあげるのも, 決して簡単ではありません.

以下, 矢印の重みが 1 の場合は 1 を省略します.

**Example 2.1.** mutation を施そうとしている頂点を  $\bullet$  で示すと



$\mu_1, \mu_2$  で変化したクラスター変数はそれぞれ

$$x'_1 = \frac{x_4 + x_2}{x_1}, \quad x''_2 = \frac{x_4 + x'_1 x_3}{x_2}$$

となります.

**Example 2.2.**  $Q = \underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ}$  の場合に, *mutation* によって得られる *seed* をすべて求めてみましょう.

$$\begin{array}{ccc}
 \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\circ} & \xrightarrow{\mu_1} & \underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\bullet} & \xrightarrow{\mu_2} & \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \\
 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x'_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+x_2}{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \frac{1+x'_1}{x_2} \end{pmatrix} \\
 & & & & \Downarrow \mu_1 \\
 \underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ} & \xleftarrow{\mu_1} & \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\circ} & \xleftarrow{\mu_2} & \underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\bullet} \\
 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+x_1}{x'_1} \\ x_1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x''_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''_1 \\ \frac{1+x''_1}{x'_2} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x''_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+x'_2}{x'_1} \\ x'_2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

実際に計算すると, 分母分子で簡約が起こって

$$x'_1 = \frac{1+x_2}{x_1}, \quad x'_2 = \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \quad x''_1 = \frac{1+x_1}{x_2}$$

となっています. 最後に  $s_{12} : x_1 \leftrightarrow x_2$  という入れ替え操作を行えば

$$s_{12} \circ \mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_1 = \text{id}$$

となって元に戻ります. 結局, 相異なるクラスター変数は全部で 5 個あって

$$\mathcal{A}(Q, x) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1]$$

となることがわかりました. この例には後述のローラン性・周期性などのエッセンスが詰まっています. 教育的なので, わからなくなったらこの例に戻ることを勧めます.

**Fact.**

- (1)  $\mu_k \circ \mu_k = \text{id}$
- (2)  $\underset{i}{\circ} \longleftarrow \underset{j}{\circ}$  ならば  $\mu_i \circ \mu_j = \mu_j \circ \mu_i$
- (3) 一般には, 相異なるクラスター変数たちの数は無限個である.

□

このように mutation は 2 回やると元に戻る性質をもつので, 今後は  $\xleftrightarrow{\mu}$  のように両向きの矢印であらわすことにしましょう.

Q 2.  $\mu_k \circ \mu_k = \text{id}$  を示せ.

なお, いろいろ実験するには B. Keller による mutation を生成するためのフリーソフトが大変便利です. Keller, mutation, Java で検索をかけるとページが見つかります.

一般に, クラスタ代数  $\mathcal{A}(Q, x)$  について次のことが知られています.

**Theorem 2.2.** [FZI, FZII]

(1) すべてのクラスタ変数  $x_i''$  は  $x_1, \dots, x_n$  の Laurent 多項式である. すなわち

$$x_i'' \in \mathbb{Q}[x_k^{\pm 1}; k \in I].$$

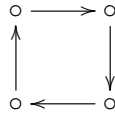
(2) 相異なるクラスタ変数が有限個  $\iff Q$  は ADE 型 quiver に mutation 同値.

□

ここで quiver  $Q, Q'$  が mutation 同値とは,  $i_1, \dots, i_M \in I$  が存在して  $\mu_{i_M} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(Q) = Q'$  となることをいいます.

ADE 型 quiver については, 詳しいことはルート系の節 2.3 で説明します. 図 4 を参照してください.

**Example 2.3.** Example 2.1 の quiver



は  $D_4$  型 quiver に mutation 同値.

定理 2.2 の証明をきちんとするのは大変なので, そのエッセンスだけ紹介します. 主張 (1) についてはこの節の残りで, また主張 (2) についてはルート系を説明してから, それぞれ証明の流れを解説します.

以下  $\mathcal{L}_0 := \mathbb{Q}[x_k^{\pm 1}; k \in I]$  とおきます.

いま  $I$  の部分集合  $\{i, i_1, \dots, i_p\}$  ( $i, i_1, \dots, i_p$  は相異なる) をとって次のような列を考えましょう.

$$(Q, x) \xrightarrow{\mu_i} (Q', x') \xrightarrow{\mu_{i_1}} \cdots \xrightarrow{\mu_{i_p}} (Q''', x''') \xrightarrow{\mu_i} (Q'', x'')$$

この mutation によって変数は

$$x_i' = \frac{L_i}{x_i}, \quad x_{i_1}' = \frac{L_{i, i_1}}{x_{i_1}}, \quad \dots, \quad x_{i_p}' = \frac{L_{i, i_1, \dots, i_p}}{x_{i_p}} \quad (L_{i, i_1, \dots} \in \mathcal{L}_0)$$



のように変化していきます. ここまではあきらかにすべてローラン多項式です. 次のステップで初めて

$$x''_i = \frac{\boxed{\phantom{x}}}{x'_i}$$

のように分母にローラン多項式が現れます. 一番本質的な  $p = 1$  の場合が次の補題の内容です.

**Key Lemma.**  $i, j \in I, i \neq j$  について

$$(Q, x) \xrightarrow{\mu_i} (Q(1), x(1)) \xrightarrow{\mu_j} (Q(2), x(2)) \xrightarrow{\mu_i} (Q(3), x(3))$$

とおく. このとき

$$x(1)_i, x(2)_j, x(3)_i \in \mathcal{L}_0$$

であり, さらに  $x(1)_i$  と  $x(2)_j, x(1)_i$  と  $x(3)_i$  は互いに素である.  $\square$

「互いに素」であるとは,  $\mathcal{L}_0$  の可逆元以外に共通因子を持たない, という意味です. たとえば先の例 2.2 では

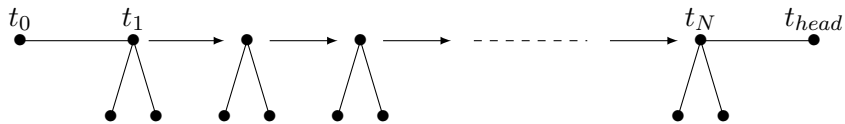
$$x(1)_1 = \frac{1+x_2}{x_1}, \quad x(2)_2 = \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \quad x(3)_1 = \frac{1+x_1}{x_2}$$

となって補題の主張が確かに成り立っています.

Key Lemma の証明は [FZ-L] に学生の人でも読めば分かるように書いてありますのでここでは省略し, これを使って次の定理を示しましょう.

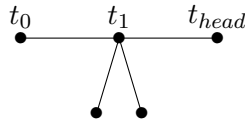
いま seed  $t, t'$  について  $\mu_k(t) = t'$  が成り立つとき, この状況を記号  $\bullet \xrightarrow[t \quad k \quad t']{} \bullet$  であらわすことにします (quiver の意味ではないので注意). それぞれの  $t$  からはこのような矢印  $k \in I$  が  $n$  種類あるわけです.

**Theorem 2.3.** (Caterpillar Lemma の CA 版)  $t_0 = (Q, x)$  とおき, 次の図を  $T_{n,N}$  とする (図は  $n = 4$  の場合).



このとき  $t_{head}$  にあらわれるすべてのクラスター変数は  $\mathcal{L}_0$  に属する.

*Proof.*  $N$  に関する帰納法による.  $N = 1$  の時は



であって自明.

$N \geq 1$  とし,  $T_{n,m}$  ( $m \leq N$ ) について定理が成り立つと仮定する.  $T_{n,N+1}$  において  $x(t_{\text{head}})_k \in \mathcal{L}_0$  を示せばよい. 帰納法の仮定から  $x'_k := x(t_{\text{head}})_k$  は  $\mathcal{L}(t_1)$  に属する (つまり seed  $t_1$  にある変数のローラン多項式である). 一方,

$$\bullet \xrightarrow{i} \bullet \xrightarrow{j} \bullet \xrightarrow{i} \bullet \quad (j \neq i)$$

となるような  $t'_3$  を選んで  $t'_3 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_N \rightarrow t_{\text{head}}$  を考えれば, やはり帰納法の仮定により  $x'_k \in \mathcal{L}(t'_3)$  である.

ここで

$$\begin{aligned} x(t_1) &= (x(t_0) \setminus \{x_i\}) \cup \{x(t_1)_i\}, \\ x(t'_3) &= (x(t_0) \setminus \{x_i, x_j\}) \cup \{x(t_2)_j, x(t'_3)_i\}, \end{aligned}$$

に注意すると

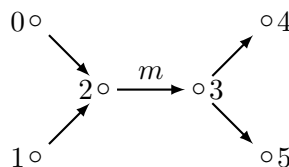
$$x'_k = \frac{f}{(x(t_1)_i)^a} = \frac{f'}{(x(t_2)_j)^b (x(t'_3)_i)^c} \quad (f, f' \in \mathcal{L}_0, a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

である. Key Lemma の後半の主張から  $x(t_1)_i$  と  $x(t_2)_j, x(t'_3)_i$  は互いに素であるので,  $a = b = c = 0$  でなければならない. 以上で証明された.  $\square$

定理 1-2 (1) の証明 任意の seed  $t$  は適当な mutation の列  $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_m}$  によって  $\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_m}(t_0) = t$  と書ける.  $T_{n,m-1}$  に定理を適用すればよい.  $\square$

*Remark.* [FZ-L] では  $\frac{\square + \dots + \square}{x_i}$  (分子は 3 項以上あり適当な条件を仮定する) の形の場合を含む一般的な有理変換について Caterpillar Lemma の証明が与えられています. この論文では 3 項の場合から「BKP のローラン性」, 「Somos 6,7 のローラン性」も示されています. より一般的な拡張については最近の論文 [LP] を参照して下さい.

Q 3.  $m \geq 2$  とする. 以下の quiver



において次の *mutation* の列をとる.

$$(Q, x) \xrightarrow{\mu_1} (Q', x') \xrightarrow{\mu_2} (Q'', x'') \xrightarrow{\mu_1} (Q''', x''')$$

このとき  $x_1''' \in \mathbb{Q}[x_k^{\pm 1}; k = 1, \dots, 6]$  であることを直接確かめよ. (もし大変であれば, 代わりに  $\circ_1 \xrightarrow{m} \circ_2$  の場合をやってみよ.)

□

*Remark.* quiver  $Q$  を表すのに反対称行列を用いることもできます.  $n \times n$  行列  $B_Q$  をつぎのように定めます:

$$B_Q = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

$$b_{ij} := \begin{cases} s_{ij} & \text{if } i \neq j, \quad \circ_i \xrightarrow{s_{ij} \geq 0} \circ_j \\ -s_{ji} & \text{if } i \neq j, \quad \circ_i \xleftarrow{s_{ji} > 0} \circ_j \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$$

このとき mutation  $\mu_k(B_Q) = (b'_{ij})$  は次のように書けます:

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = k \text{ of } j = k) \\ b_{ij} + \frac{1}{2}(|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|) & (i, j \neq k) \end{cases}$$

反対称行列を用いると mutation が式で書けるので計算ですませられる反面, 直感的な意味はわかりにくいです.

*Remark.* より一般に, 反対称化可能行列について CA を定義することができます. ここで

$B \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$  が反対称化可能

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$  対角行列  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  ( $d_i \in \mathbb{Z}, d_i \neq 0$ ) が存在して  $DB$  が反対称.

**Example 2.4.** 行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ -d_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (d_1, d_2 > 0)$$

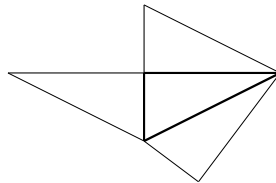
に対して  $D = \begin{pmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$  とおけば

$$DB = \begin{pmatrix} 0 & d_1 d_2 \\ -d_1 d_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 ルート系 (rank 2)

CA について語るときは必ずこのできないルート系について解説します.

この節では肩慣らしとして  $\mathbb{R}^2$  のタイル貼りについて考察します. 種類の三角形だけを用い, 辺に関しての折り返しを繰り返すことによって平面のタイル貼りができるような場合を考えます.



Fact. このようなタイル貼りが可能なのは, 単位となる三角形が次のいずれかの場合に限る.

- a) 正三角形
- b) 直角 2 等辺三角形
- c) 正三角形をタテ半分に切ったもの
- d) 上の三角形を並べ直したもの

□

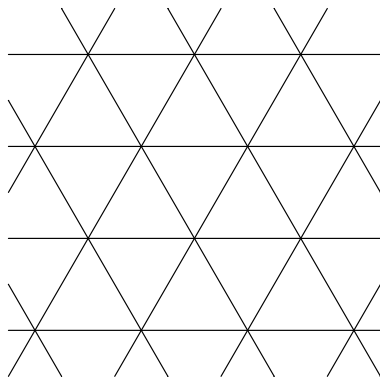
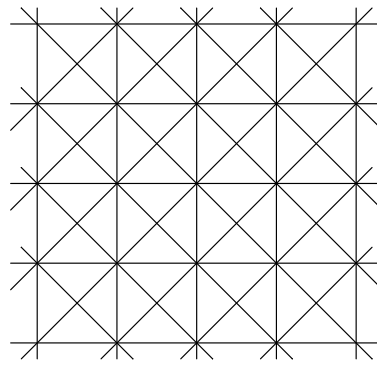


図 2: a) 正三角形



b) 直角 2 等辺三角形

Q 4. これを証明せよ.

なお, これらの場合と Conway-Coxeter frieze の 2 列の場合とのあいだには深い関係があります. 上の 4 つのうち  $c), d)$  は本質的には同じであり,  $a), b), c)$  は例 1.4 においてそれぞれ  $(d_1, d_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$  の場合に対応します.

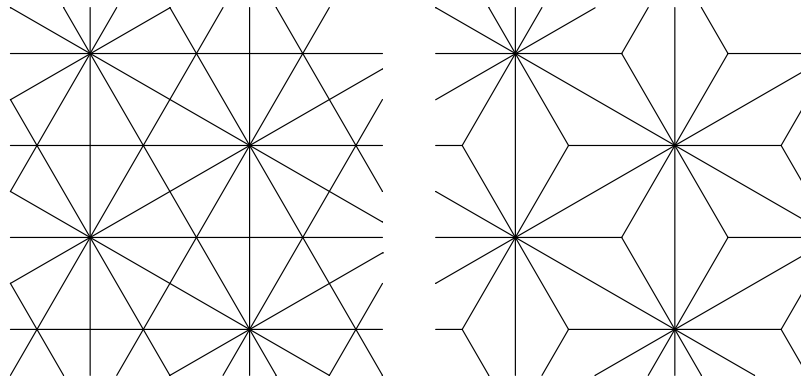
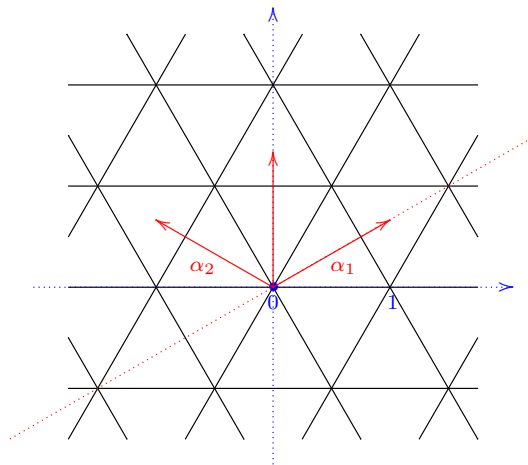


図 3: c) 正三角形の半分

d) 並べ直したもの

それぞれを詳しく見て行きましょう。

Case a). 一辺の長さを 1 とした正三角形によるタイル貼りです。この図は 3 種の平行線群からできていますね。



$$\text{Case a): } \alpha_1 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \alpha_2 = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

これらの平行線を法線ベクトル  $\alpha$  と整数  $k$  を用いて

$$L_{\alpha,k} := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (v, \alpha) = k\}$$

と表しましょう. ただし  $(*, *)$  は  $\mathbb{R}^2$  上の内積です. 3種の直線群はそれぞれ

$$L_{\alpha_1} := \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} L_{\alpha_1, k} = L_{-\alpha_1}$$

$$L_{\alpha_2} := \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} L_{\alpha_2, k} = L_{-\alpha_2}$$

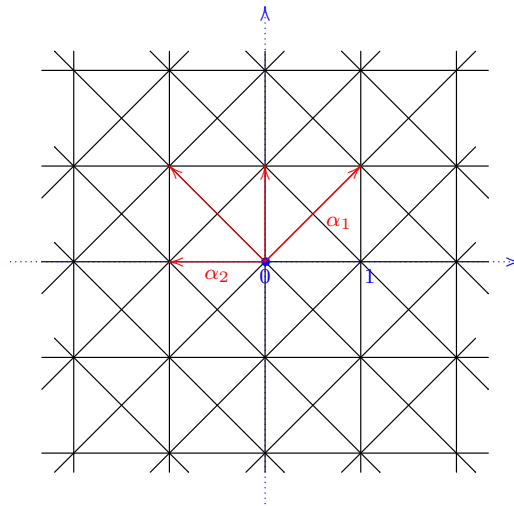
$$L_{\alpha_1 + \alpha_2} := \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} L_{\alpha_1 + \alpha_2, k} = L_{-\alpha_1 - \alpha_2}$$

とあらわされます. ここに登場した6個のベクトルの集合

$$\Phi := \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$$

を a) のルート系とよびます.

Case b). 長さ1の長辺をもつ垂直2等辺三角形によるタイル貼りです.



$$\text{Case b): } \alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (-1, 0)$$

この場合ルート系は8個のベクトルからなる集合になります.

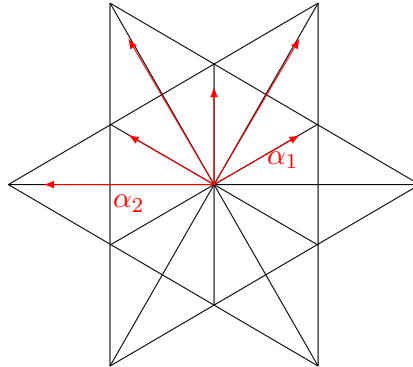
$$\Phi := \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(2\alpha_1 + \alpha_2)\}$$

Case c), d).

c), d) は同じルート系

$$\Phi := \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \pm(3\alpha_1 + \alpha_2), \pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$$

に対応しています.



Case c), d):  $\alpha_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ ,  $\alpha_2 = (-\sqrt{2}, 0)$

*Key observation.*  $(d_1, d_2) = (1, 1)$  の場合の frieze にどんなクラスター変数がでてきたか、思い出しましょう。それらは

$$x_1, \quad x_2, \quad \frac{1+x_2}{x_1}, \quad \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \quad \frac{1+x_1}{x_2}$$

でした。また  $(d_1, d_2) = (1, 2)$  の場合は分母にだけ着目すると

$$x_1, \quad x_2, \quad \frac{*}{x_1}, \quad \frac{*}{x_1^2x_2}, \quad \frac{*}{x_1x_2}, \quad \frac{*}{x_2}$$

でした。ここにルート系が隠れていますね。つまり

$$\{\text{相異なるクラスター変数たち}\} \setminus \{x_1, x_2\} \xleftrightarrow[1:1]{} \text{正ルートの集合}$$

となっているらしい。(「正ルートの集合」は  $\Phi$  の元のうちで  $\pm$  のうち  $+$  をとったものの集合です。) 次の節で一般の状況に触れます。

**Q 5.**  $(d_1, d_2) = (1, 3)$  のときのクラスター変数の分母を確認せよ。また *Case c), d)* の場合にルート系と対応がつくことを確認せよ。

*Remark.* 次元をあげて

$$\text{三角形} \rightsquigarrow (n+1) \text{ 単体}, \quad \text{平行線} \rightsquigarrow \text{平行超平面}$$

として同様の問題を考えると rank  $n$  のルート系が現れます。

### 2.3 一般のルート系

抽象的にルート系を以下のように定義します。  $V$  を  $n$  次元 Euclid 空間, すなわち  $\mathbb{R}$  上の  $n$  次元ベクトル空間で正定値内積  $(, )$  が定まっているものとします。

**Definition 2.4.**  $V$  の部分集合  $\Phi$  が以下の条件 (1)–(4) を満たすとき  $\Phi$  を  $V$  におけるルート系という.

- (1)  $\Phi$  は零ベクトルを含まない有限集合で,  $\mathbb{R}$  上  $V$  を生成する.
- (2)  $\alpha \in \Phi$  に対して  $V$  上の線形変換  $s_\alpha$  を

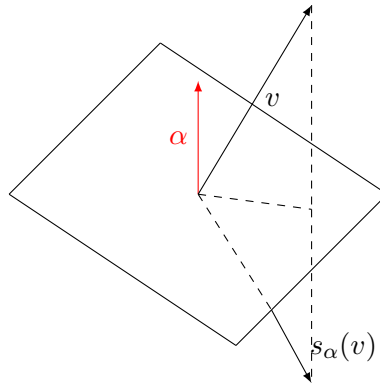
$$s_\alpha : V \longrightarrow V, \quad v \mapsto v - 2 \frac{(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

で定めると  $s_\alpha(\Phi) = \Phi$  が成り立つ.

- (3) 任意の  $\alpha, \beta \in \Phi$  に対し  $2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$
- (4)  $\alpha \in \Phi$  かつ  $k\alpha \in \Phi$  となる実数  $k \in \mathbb{Z}$  は  $k = \pm 1$  に限る.

□

条件 (2) に出てくる写像  $s_\alpha$  は, ベクトル  $\alpha$  に直交する超平面に関する鏡映を表します. 定義から  $s_\alpha^2 = \text{id}$ ,  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  です.



$\alpha$  に直交する平面に関する鏡映

**Lemma 2.5.**  $\alpha, \beta \in \Phi$  は一次独立であるとして, そのなす角を  $\theta$  とする. 必要なら  $\alpha$  と  $\pm\beta$  の役割を入れ替えることにより  $(\alpha, \beta) \geq 0$ ,  $|\alpha| \leq |\beta|$  とする. このとき

$$2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} =: C_{\alpha, \beta}$$

の取り得る値は次のいずれかである.

$\theta$	$ \beta / \alpha $	$C_{\alpha\beta}$	$C_{\beta\alpha}$
$\pi/2$	不定	0	0
$\pi/3$	1	1	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}$	1	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$	1	3



*Proof.*  $(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta| \cos \theta$  より  $C_{\alpha\beta}C_{\beta\alpha} = 4 \cos^2 \theta$ . これが整数であり, また  $\cos^2 \theta \neq 1$  より  $4 \cos^2 \theta = 0, 1, 2, 3$  を得る. よって表の可能性しかない.  $\square$

**Example 2.5.** *Case a), b)* の場合に  $\alpha_1, \alpha_2$  を使って計算するとそれぞれ

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

となる.  $\square$

**Definition 2.6.** (1) ルート系  $\Phi$  が可約であるとは, 空でない部分集合  $\Phi_1, \Phi_2$  が存在して

$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset, \Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2, \text{ かつ } \alpha \in \Phi_1, \beta \in \Phi_2 \Rightarrow (\alpha, \beta) = 0$$

が成り立つことをいう. 可約でないとき  $\Phi$  は既約という.

(2)  $V_1, V_2$  を Euclid 空間,  $\Phi_i$  を  $V_i$  のルート系とする.  $\Phi_1$  と  $\Phi_2$  が同型であるとは, 線形同型写像  $f: V_1 \rightarrow V_2$  が存在して

$$f(\Phi_1) = \Phi_2, \text{ かつ } \alpha, \beta \in \Phi_1 \Rightarrow C_{f(\alpha)f(\beta)} = C_{\alpha\beta}$$

が成り立つことをいう.  $\square$

**Definition 2.7.**  $\Phi$  をルート系とする. 線形変換の集合  $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$  で生成される  $V$  の変換群を Weyl 群といい  $W$  であらわす.  $\square$

*Remark.*  $W(\Phi) = \Phi$  が成り立つので, Weyl 群の元は  $\Phi$  の置換とみなすことができます.  $\Phi$  は有限集合なので, これから  $W$  が有限群であることがわかります.

## 2.4 ルート系の分類

**Definition 2.8.** (1) ルート系  $\Phi$  の部分集合  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  であって次の条件をみたすものが存在する:

(a)  $\Pi$  は  $V$  の基底,

(b)  $\beta \in \Phi$  を  $\beta = \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k$  とあらわすとき,  $c_k \in \mathbb{Z}$ , かつ  $c_1, \dots, c_n \geq 0$ , または  $c_1, \dots, c_n \leq 0$  のいずれかがなりたつ. 前者のとき  $\beta$  は正ルート, 後者のとき負ルートという.

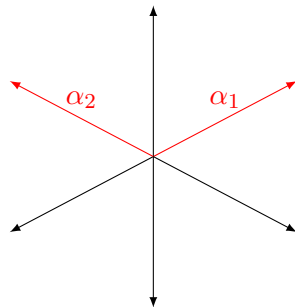
$\Pi$  の元  $\alpha_k$  を単純ルートという.

(2) Weyl 群は  $s_{\alpha_i}$  で生成される :  $W = \langle s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n} \rangle$ .

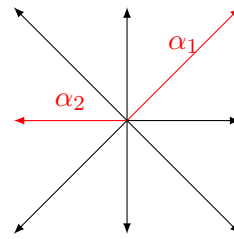
□

(1)-(b) から, ルート系は正ルートの集合  $\Phi^+$  と 負ルートの集合  $\Phi^-$  の disjoint union  $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$  となります.

**Example 2.6.**  $A_2$  型,  $B_2$  型のルート系の単純ルートはそれぞれ図のようになります.



$A_2$



$B_2$

**Lemma 2.9.**

$\Phi : V$  のルート系,  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  : 単純ルートの集合,  $C_{ij} = 2 \frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$

$\Phi' : V'$  のルート系,  $\Pi' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$  : 単純ルートの集合,  $C'_{ij} = 2 \frac{(\alpha'_j, \alpha'_i)}{(\alpha'_j, \alpha'_j)}$

とする. このとき次の 2 条件は同値である :

(1)  $\Phi$  と  $\Phi'$  は同型

(2) 基底の番号付けを適当に入れ替えると任意の  $i, j$  について  $C_{ij} = C'_{ij}$  となる.

**Definition 2.10.**  $C = (C_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  を  $\Phi$  の Cartan 行列という. □

補題 2.9 により,  $\Phi$  を分類するには  $C$  の可能性を調べ上げれば良いことがわかります.

**Definition 2.11.** Cartan 行列  $C = (C_{ij})$  から次の規則によってグラフ「Dynkin 図」が定まり, 両者は 1 対 1 に対応する.

規則は次の通り.

- グラフの頂点は  $n$  個である.
- $|C_{ij}| \geq |C_{ji}|$  のとき 頂点  $i, j$  を  $|C_{ij}|$  本の辺で結ぶ.

- 矢印の向きは  $|\alpha_i| < |\alpha_j|$  のとき  $j$  から  $i$  へ向きをつける.

□

**Theorem 2.12.** 既約ルート系は  $A-G$  型 *Dynkin* 図に対応するものしかない.

□

*Dynkin* 図のリストは次ページの図の通りです. 特に  $n = 2$  の場合は  $A_2, B_2 = C_2, G_2$  の 3 種類しかありません.

このうち特に 1 本線しかでてこないもの (*ADE* 型) が quiver に対応します. quiver とは対応しなくても CA としてはすべての *Dynkin* 図に対応するものが存在します.

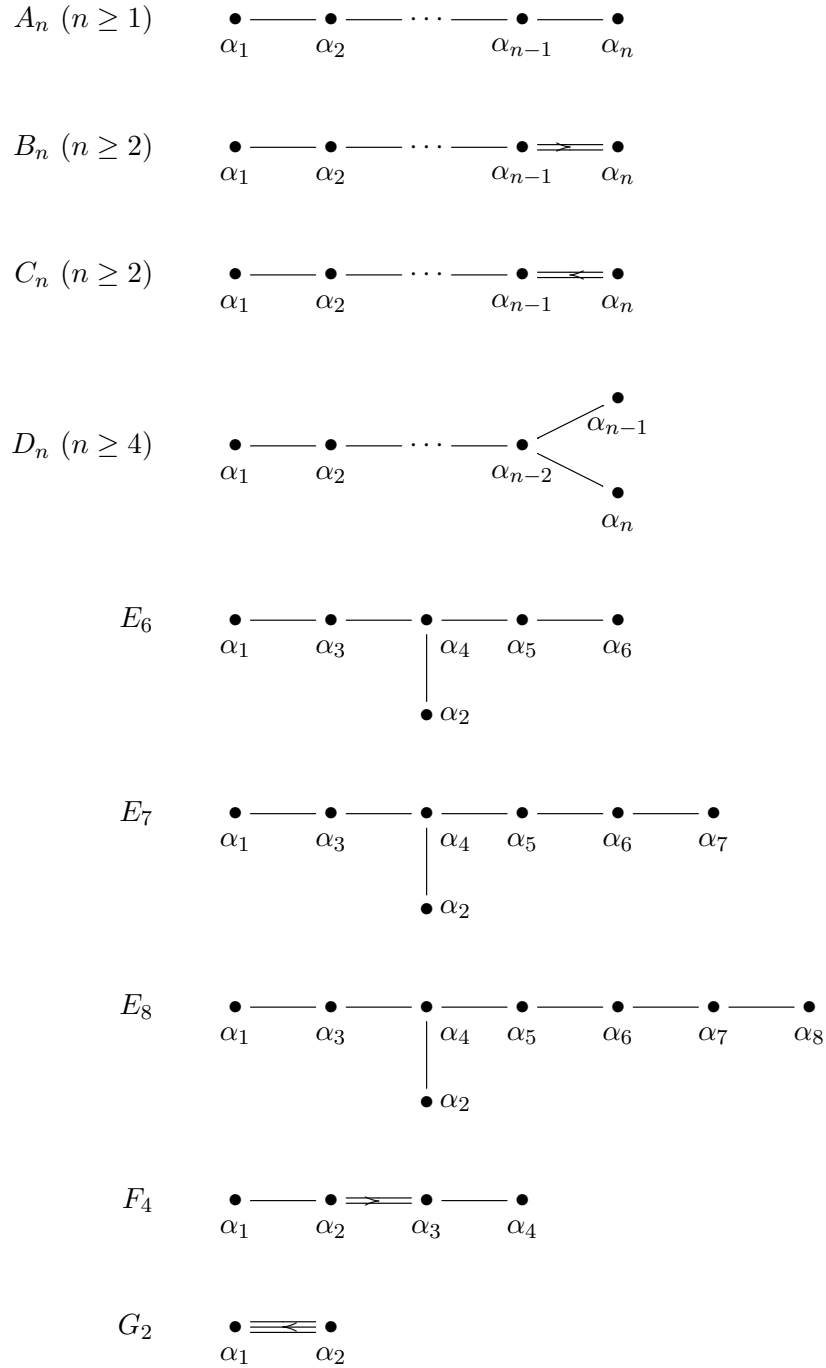


图 4: Dynkin 图形

•  $A_n$  型ルート系

今後よく出てくる  $A_n$  型ルート系について, その実現と Weyl 群の作用の仕方を見ておきましょう. まず Dynkin 図はつぎのものでした.

$$\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

1          2          3                                   $n-1$            $n$

$e_1, \dots, e_{n+1}$  を  $\mathbb{R}^{n+1}$  の標準基底とします. すなわち

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-th}}{1}, 0, \dots, 0), \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

です. ルート系の定義に出てくる  $n$  次元 Euclid 空間を

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_k = 0\}$$

とします. このときルート系, 単純ルートの集合, 正 (負) ルートの集合はそれぞれ

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j\},$$

$$\Pi = \{\alpha_i = e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$\Phi^\pm = \{e_i - e_j \mid i \leq j\},$$

となります. またこれを用いて計算すると

$$\begin{aligned} s_{\alpha_k}(e_i) &= e_i - 2 \frac{(\alpha_k, e_i)}{(\alpha_k, \alpha_k)} \alpha_k \\ &= \begin{cases} e_{k+1} & i = k \\ e_k & i = k+1 \\ e_i & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

となります. つまり  $s_{\alpha_k}$  は  $e_k, e_{k+1}$  を入れ替える互換として作用します. このことから

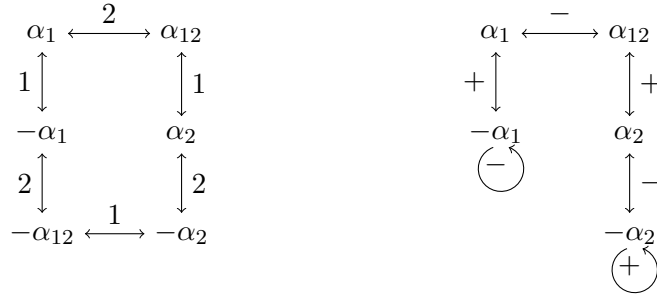
**Fact.**  $W_{A_n}$  は置換群  $\mathfrak{S}_{n+1}$  に同型. □

今後  $s_i = s_{\alpha_i}$  と書きます.  $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$  に注意. 以下特によく使う  $n = 2, 3$  のときに Weyl 群の作用の様子を描いてみると図 5 のようになります ( $\tau_\pm$  については後述, 定義 2.15 を参照).

**Q 6.**  $A_4$  型ルート系について同様の図を作成せよ.

$A_2$  型  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}\}$

$$\begin{array}{c} + \\ \circ \\ 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} - \\ \circ \\ 2 \end{array}$$



$A_3$  型  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{123}\}$

$$\begin{array}{c} + \\ \circ \\ 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} - \\ \circ \\ 2 \end{array} \longleftarrow \begin{array}{c} + \\ \circ \\ 3 \end{array}$$

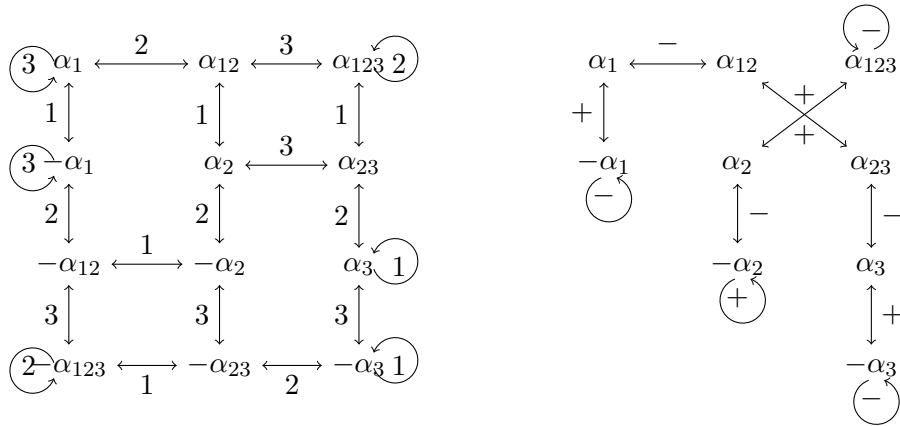


図 5: Weyl 群と  $\tau^\pm$  の作用 — 図の左に  $s_i$  の作用 ( $i$  と略記), 右に  $\tau^\pm$  の作用 ( $\pm$  と略記) を掲げる. また  $\alpha_{ij} = \sum_{k=i}^j \alpha_k$  と略記する.

## 2.5 定理 2.2 について

まず用語を少し.

**Definition 2.13.** (1) クラスター代数  $A(Q, x)$  が有限とは,  $(Q, x)$  から *mutation* で得られる *seed* が有限個であることをいう. (クラスター変数が有限個, といってもよい)

(2) 反対称行列  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$  に対して  $A(B) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$  を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j) \\ -|b_{ij}| & (i \neq j) \end{cases}$$

で定める.

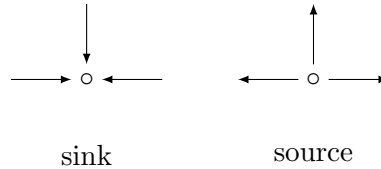
□

ルート系  $\Phi$  の部分集合

$$\Phi_{\geq -1} := \Phi^+ \sqcup (-\Pi)$$

を導入し,  $\Phi_{\geq -1}$  の元を「ほとんど正のルート」(almost positive root) ということにします.

また quiver の頂点について, その頂点を端点とする辺の向きがすべて入ってくる向きのとき sink (沈点), すべて出て行く向きのとき source (湧点) といいます.



以上の記号で, これまで保留してきた定理 2.2 (2) を少しくわしく述べます.

**Theorem 2.14.** [FZII] クラスター代数  $A(Q, x)$  について次が成り立つ.

- (1)  $A(Q, x)$  が有限であるための必要十分条件は,  $Q$  に *mutation* 同値な quiver  $Q'$  が存在して  $A(B_{Q'})$  が ADE 型の Cartan 行列になることである.
- (2)  $A(Q, x)$  が有限であるとき, 1 : 1 対応

$$\phi : \Phi_{\geq -1} \longrightarrow \text{クラスター変数の集合}, \quad \alpha \mapsto x[\alpha]$$

が存在する. 特に  $Q$  が ADE 型の quiver で, かつすべての頂点が source または sink であるならば, この対応は

$$\phi : \alpha = \sum_{i=1}^n n_i \alpha_i \quad \mapsto \quad x[\alpha] = \frac{P_\alpha}{\prod_{i=1}^n x_i^{n_i}}$$

と書くことができる. ここで  $P_\alpha \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  は定数項が 0 でない多項式をあらわす.

□

主張 (1) の証明は大変なのでここでは省略し, 以下主張 (2) を解説します.

*Remark.* quiver とは限らない, 反対称化可能行列  $B$  に付随するクラスター代数  $\mathcal{A}(B, x)$  については, 定理の主張 (1) は次のようになります:

(1)'  $\mathcal{A}(B, x)$  が有限であるための必要十分条件は,  $B$  に mutation 同値なある  $B'$  が存在して  $A(B')$  が  $A-G$  型のルートの Cartan 行列になることである.

定理の証明のため準備をしましょう. これはあとで応用を考えるとときにも出てきます.

$\mathcal{A}(Q, x)$  が有限であるとして, はじめから  $Q$  は  $ADE$  型 Dynkin 図としましょう. このとき mutation を有限回施す事によってすべての頂点が sink または source となるようにすることができます. 以下  $Q$  をこのように選び, source の集合を  $I_+$ , sink の集合を  $I_-$  (したがって  $I = I_+ \sqcup I_-$ ) とし,  $i \in I$  に対して

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} +1 & (i \in I_+) \\ -1 & (i \in I_-) \end{cases}$$

とおきます. 例えば  $D_5$  型の例では

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 5 & & \\ & & & & \circ & & \\ & & & & \uparrow & & \\ \circ & \longrightarrow & \circ & \longleftarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} I_+ = \{1, 3\} \\ I_- = \{2, 4, 5\} \end{array}$$

**Definition 2.15.**  $\varepsilon = +, -$  に対して写像  $\tau_\varepsilon : \Phi_{\geq -1} \rightarrow \Phi_{\geq -1}$  を次のように定める:

$$\tau_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} \alpha & (\text{ある } i \in I_{-\varepsilon} \text{ について } \alpha = -\alpha_i \text{ のとき}) \\ (\prod_{i \in I_\varepsilon} s_i)(\alpha) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

□

右辺の 2 番目の式は可換なもの積なので, 順序は気にしなくても大丈夫です. この定義によって  $\tau_\varepsilon$  が実際  $\Phi_{\geq -1}$  からそれ自身への写像として well-defined であることは確認できます. さらに

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon^{(k)} &:= \overbrace{\tau_\pm \cdots \tau_\varepsilon \tau_{-\varepsilon} \tau_\varepsilon}^k, \\ k_\varepsilon(\beta) &:= \min(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tau_\varepsilon^{(k+1)}(\beta) = \tau_\varepsilon^{(k)}(\beta) \in -\Pi), \quad (\beta \in \Phi_{\geq -1}) \end{aligned}$$



とおきます. たとえば  $\beta = -\alpha_i \in -\Pi$  なら,  $i$  が source のとき  $k_-(\beta) = 0$ , sink のとき  $k_+(\beta) = 0$  です. 図 5 を参照すると  $A_2$  型のとくに

$$k_+(\alpha_1 + \alpha_2) = 2 = k_-(\alpha_1 + \alpha_2), \quad k_+(\alpha_1) = 1, \quad k_-(\alpha_1) = 3$$

となっていることが確かめられます.

*Remark.* 一般に  $\beta \in \Phi_{\geq -1}$  について  $k_+(\beta) + k_-(\beta) = h + 1$  が成り立ちます. ここで  $h$  は Coxeter 数, すなわち  $s_1 s_2 \cdots s_n \in W$  の位数です. 特に

$$k_{\varepsilon(j)}(-\alpha_j) = h + 1, \quad k_{-\varepsilon(j)}(-\alpha_j) = 0.$$

	$A_n$	$D_n$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$h$	$n + 1$	$2n + 2$	12	18	30

Coexter 数

**Definition 2.16.** (1)  $\alpha_i \in \Pi$  に対して記号  $[* : \alpha_i] : \mathbb{Z}\Pi \rightarrow \mathbb{Z}$  を次で定める.

$$[\gamma : \alpha_i] = n_i \quad \left( \gamma = \sum_{j=1}^n n_j \alpha_j \text{ のとき} \right)$$

(2) 写像  $(*||*) : \Phi_{\geq -1} \times \Phi_{\geq -1} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を次で定める.

$$\begin{aligned} (-\alpha_i || \gamma) &= \max([\gamma : \alpha_i], 0), \\ (\gamma' || \gamma) &= (\tau_{\varepsilon}(\gamma') || \tau_{\varepsilon}(\gamma)) \end{aligned}$$

(3)  $\gamma, \gamma' \in \Phi_{\geq -1}$  が混合可能 (compatible) とは  $(\gamma || \gamma') = (\gamma' || \gamma) = 0$  が成り立つこと.

$\gamma, \gamma' \in \Phi_{\geq -1}$  が交換可能 (exchangeable) とは  $(\gamma || \gamma') = (\gamma' || \gamma) = 1$  が成り立つこと. □

定義 (2) が well-defined であることはチェックしなくてもはいけませんが, チェックできません. 2 番目の規則を使って  $\tau_{\varepsilon}$  を  $\gamma'$  に繰り返し施して行き, 最後に  $-\alpha_i$  になったら 1 番目の規則を使えば計算ができるわけです.

**Example 2.7.**  $A_2$  の場合, 図 5 を見ると

$$\begin{aligned} (\alpha_1 || \alpha_1 + \alpha_2) &= (-\alpha_1 || \alpha_2) = 0, \\ (\alpha_1 || \alpha_2) &= (-\alpha_1 || \alpha_1 + \alpha_2) = 1, \\ (\alpha_1 || -\alpha_2) &= 0, \quad (\alpha_1 || -\alpha_1) = 1 \end{aligned}$$

などがわかる.

必要な事実を列挙します.

**Theorem A .** ( $\Phi_{\geq -1}$  の単体複体)

$\Delta(\Phi_{\geq -1})$  を

頂点 :  $\gamma \in \Phi_{\geq -1}$

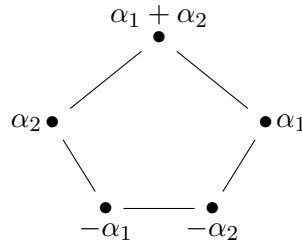
単体 : どの2つも互いに混合可能な  $\gamma \in \Phi_{\geq -1}$  たち

として得られる単体複体とする. このとき

- (1) どの単体も  $n$  個のルートからなる  $(n-1)$  単体であり, これら  $n$  個のルートは  $\mathbb{Z}\Pi$  の基底である.
- (2) 単体  $C, C'$  が「隣り合っている」とは  $\beta, \beta' \in \Phi_{\geq -1}$  があって  $C' = (C \setminus \{\beta\}) \cup \{\beta'\}$  が成り立つことと定義する. このとき  $\beta, \beta'$  は交換可能である.

□

**Example 2.8.**  $A_2$  型の場合は次の1単体になる.



*Remark.*  $\Delta(\Phi_{\geq -1})$  の  $(n-1)$  単体を頂点とする双対複体は Theorem 2.2 (1) の証明に使われる tree に対応します.

**Theorem B .** 各単体  $C \in \Delta(\Phi_{\geq -1})$  に対し, 反対称行列  $B(C) = (b_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in C} \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$  であって次を満たすものが定義できる.

- (1)  $C \mapsto B(C)$  は行列の *mutation* と次の意味で *compatible* である. つまり  $C, C'$  が隣り合い,  $\beta, \beta'$  が交換可能のとき

$$B(C') = \mu_{\beta}(B(C)).$$

- (2)  $C_0 := \{-\alpha_1, \dots, -\alpha_n\}$  に対し  $B(C_0)$  を

$$b_{-\alpha_i, -\alpha_j} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ \varepsilon(j)a_{ij} & (i \neq j) \end{cases}$$

と定める. ただし  $A(Q) = (a_{ij})$ .

□

後半の条件を詳しく述べると,  $a_{ij} < 0$  のとき

$$\begin{aligned} j \in I_+ &\implies b_{-\alpha_i, -\alpha_j} = +a_{ij} < 0, & \begin{array}{c} \bar{\circ} \\ i \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} + \\ \circ \\ j \end{array} \\ j \in I_- &\implies b_{-\alpha_i, -\alpha_j} = -a_{ij} > 0, & \begin{array}{c} + \\ \circ \\ i \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \bar{\circ} \\ j \end{array} \end{aligned}$$

ということです.

**Theorem C** .  $\tau_\varepsilon(C) = C'$  となっているとき  $B(C') = -B(C)$ . □

以上を用いて Theorem 2.2 (2) の証明をしましょう.  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$  に対し  $k(\alpha) = \min(k_+(\alpha), k_-(\alpha))$  とおき,  $k(\alpha)$  についての帰納法を用います.

(i)  $k(\alpha) = 0$  のとき

このときは  $\alpha = -\alpha_i$  と書く事ができます. 定義により  $x[\alpha] = x_i$  で主張は成り立ちます.

(ii)  $k(\alpha) = k \geq 1$  のとき

$k(\alpha') < k$  を満たすすべての  $\alpha' \in \Phi_{\geq -1}$  について

$$x[\alpha'] = \frac{P_{\alpha'}}{x^{\alpha'}} \quad (P_{\alpha'} \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n])$$

とします. ここで  $\alpha' = \sum_{i=1}^n n_i \alpha_i$  のときに  $x^{\alpha'} = \prod_{i=1}^n x_i^{n_i}$  という記法を用いています.

さて,  $\alpha$  に対してある  $j \in I$  をとれば

$$\alpha = \tau_{\varepsilon_j}^{(k)}(-\alpha_j) = \tau_{-\varepsilon_j}^{(k-1)}(\alpha_j)$$

となっています.  $\tau = \tau_{-\varepsilon_j}^{(k-1)}$  とおくと

$$1 = (\alpha_j || -\alpha_j) = (\tau(\alpha_j) || \tau(-\alpha_j))$$

などから  $\alpha = \tau(\alpha_j)$  と  $\tau(-\alpha_j)$  が交換可能であることがわかります. 様子を図示すると

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} -\alpha_j & \xleftrightarrow{\tau_{\varepsilon_j}} & \alpha_j \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \tau(-\alpha_j) & \longleftrightarrow & \alpha \end{array} & \begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha_j & C'_0 \Big| C_0 & -\alpha_j \\ \swarrow & & \searrow \\ \cdot & & \cdot \end{array} & \xrightarrow{\tau} & \begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha & C' \Big| C & \tau(-\alpha_j) \\ \swarrow & & \searrow \\ \cdot & & \cdot \end{array} \end{array}$$

よって Theorem C から,  $B(C) = (-1)^{k-1}B(C_0)$  となります. ここで  $B(C_0)$  に対応する quiver はすべての頂点が source か sink かのいずれかであったので, Theorem B の条件から,

$$x[\alpha] = \frac{\prod_{i(\neq j)} x[\tau(-\alpha_i)]^{-a_{ij}} + 1}{x[\tau(-\alpha_j)]} \quad (2.1)$$

となります.

$k = 1$  ならば  $\tau = \text{id}$ ,  $\alpha = \alpha_j$  であって, 上の式は

$$x[\alpha_j] = \frac{\prod_{i(\neq j)} x_i^{-a_{ij}} + 1}{x_j}$$

となり, 主張は成り立ちます.

$k \geq 2$  としましょう. このときは  $k(\alpha)$  の定義から, (2.1) の右辺にあらわれるルート  $\alpha'$  はすべて正のルートです. よって帰納法の仮定により

$$\begin{aligned} x[\alpha] &= \frac{\prod_{i(\neq j)} \left( \frac{P_{\tau(-\alpha_i)}}{x^{\tau(-\alpha_i)}} \right)^{-a_{ij}} + 1}{\frac{P_{\tau(-\alpha_j)}}{x^{\tau(-\alpha_j)}}} \\ &= x^{\tau(-\alpha_j) - \delta_j} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i(\neq j)} P_{\tau(-\alpha_i)}^{-a_{ij}} + x^{\delta_j}}{P_{\tau(-\alpha_j)}}}_{\delta_j = -\sum_{i(\neq j)} a_{ij} \tau(-\alpha_i)}, \end{aligned}$$

が得られます.

波線部分を  $P_\alpha$  とすると, ローラン性から  $P_\alpha \in \mathcal{L}_0 = \mathbb{Q}[x_k^{\pm 1}; k \in I]$  です. 一般に定数項が 0 でない多項式  $A, B$  について  $A/B \in \mathcal{L}_0$  ならば  $A/B$  は定数項が 0 でない多項式になるので, 結局  $P_\alpha$  は定数項が 0 でない多項式です.

残っているのは等式

$$\tau(-\alpha_j) - \delta_j = -\tau(\alpha_j) \quad (2.2)$$

を示す事です. 証明は省略しますが, 次の事実が知られています ([FZ] にも書いてあります):

$1 \leq \ell \leq h$  ならば

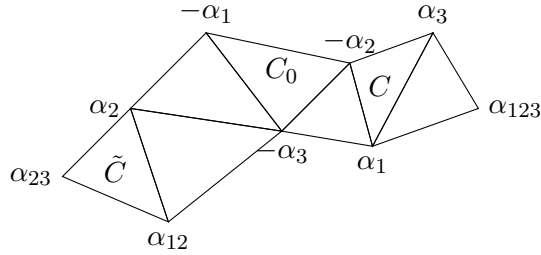
$$\tau_{-\varepsilon(j)}^{(\ell)}(\alpha_j) + \tau_{-\varepsilon(j)}^{(\ell)}(-\alpha_j) = -\sum_{i(\neq j)} a_{ij} \tau_{-\varepsilon(j)}^{(\ell)}(-\alpha_i).$$

これより (2.2) が従います. 以上で証明できました.  $\square$

*Remark.*  $\tau_\pm$  は一見 mutation とよく似ていますが, 実は違う物です. たとえば  $A_3$  型  $\overset{1}{\circ} \rightarrow \overset{2}{\circ} \leftarrow \overset{3}{\circ}$  を見てみましょう.  $\tau_-$  は  $\mu_2$ ,  $\tau_+$  は  $\mu_1\mu_3$  に見えますが, 図のように

$$\begin{aligned} \tau_+(C_0) &= C, & \tau_+\mu_2(C_0) &= \mu_2(C), \\ \mu_1\mu_3(C_0) &= C, & \mu_1\mu_3\mu_2(C_0) &= \tilde{C}, \end{aligned}$$

であって, これらは一般に異なった演算です.



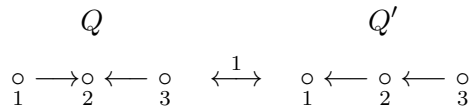
Remark.

(1) 一般に次のことが知られています.

$$(\alpha \parallel \beta) = 0 \iff (\beta \parallel \alpha) = 0,$$

quiver が simply laced な Dynkin 図形 のとき  $(\alpha \parallel \beta) = (\beta \parallel \alpha)$ .

(2) ある seed  $(Q, x)$  から mutation で得られる相異なるクラスター変数の集合を  $X \subset \mathbb{Q}[x_i^{\pm 1}; i \in I]$ , 別の seed  $(Q', x')$  から mutation で得られる相異なるクラスター変数の集合を  $X' \subset \mathbb{Q}[x'_i{}^{\pm 1}; i \in I]$  とし,  $\gamma : \mathbb{Q}[x_i^{\pm 1}; i \in I] \rightarrow \mathbb{Q}[x'_i{}^{\pm 1}; i \in I]$  を  $\gamma(x_i) = x'_i$  ( $i \in I$ ) によって定めます.  $Q$  と  $Q'$  が mutation 同値でも, 一般には  $\gamma(X) \neq X'$  です. たとえば  $Q, Q'$  を次のような mutation 同値な  $A_3$  型 quiver とします.



Theorem 2.14 により  $X$  に属する  $(x_i)$  の ローラン多項式の分子には必ず定数項がありますが,  $X'$  に属する  $(x'_i)$  の ローラン多項式の分子には定数項を持たないものがあります. 実際,  $\mu_2(Q', x')$  を計算すると  $\frac{x'_1 + x'_3}{x'_2} \in X'$  が現れます.

## 2.6 係数つきクラスター代数

この節では CA を拡張した「係数つき CA」の概念を紹介します. 名前だけ見ると「クラスター変数」のほうが「係数」よりエライようですが, あとで説明するように, seed を支配しているのは実は「係数」なのです.

semifield (半体)  $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$  とは, 積  $\cdot$  の入った可換群  $\mathbb{P}$  に加法  $\oplus$  を入れたものを言います.  $a, b, c \in \mathbb{P}$  のとき演算規則

$$\begin{aligned}
 a \oplus b &= b \oplus a, \\
 (a \oplus b) \cdot c &= a \cdot c \oplus b \cdot c, \\
 (a \oplus b) \oplus c &= a \oplus (b \oplus c)
 \end{aligned}$$

がなりたつとします.  $\mathbb{ZP}$  を (積・に関する) 群環とするとこれは整域になることがわかります.  $\mathbb{QP}$  を  $\mathbb{ZP}$  の商体とします.

$Q$  を quiver,  $I = \{1, \dots, n\}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  を  $\mathbb{QP}$  上代数的に独立な変数とし, さらに  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ( $y_i \in \mathbb{P}$ ) を用意します.  $y_i$  を「係数」とよびます. (単純に  $x, y$  をそれぞれ  $x$  変数,  $y$  変数とよぶ流儀もあります.)

**Definition 2.17.** 係数つき CA  $\mathcal{A}(Q, x, y)$  を次のように定義する.

- (1)  $(Q, x, y)$  を初期 seed とする.
- (2) mutation  $\mu_k(Q, x, y) = (Q', x', y')$  を以下で定める.

$Q'$  は前と同じ,

$$y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & (i = k) \\ y_i \cdot (1 \oplus y_k)^{s_{ik}} & \begin{pmatrix} i & \xrightarrow{s_{ik}} & k \\ \circ & & \circ \end{pmatrix} \\ y_i \cdot \left(\frac{y_k}{1 \oplus y_k}\right)^{s_{ki}} & \begin{pmatrix} i & \xleftarrow{s_{ki}} & k \\ \circ & & \circ \end{pmatrix}, \\ y_i & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$x'_i = \begin{cases} x_i & (i \neq k), \\ \frac{1}{x_k} \left( \frac{y_k}{1 \oplus y_k} \prod_{j \rightarrow k} x_j^{s_{jk}} + \frac{1}{1 \oplus y_k} \prod_{j \leftarrow k} x_j^{s_{kj}} \right) & (i = k) \end{cases}.$$

- (3)  $(Q, x, y)$  から mutation を繰り返し施して得られる seed たちに入っているすべてのクラスター変数  $x'_k$  で生成される  $\mathbb{QP}(x_i; i \in I)$  の  $\mathbb{Z}$  部分代数  $\mathcal{A}(Q, x, y)$  を係数つき CA という.

□

*Remark.* semifield の重要な例を 3 つ挙げます.

- (1) 独立変数  $y = (y_1, \dots, y_n)$  の有理式  $R(y) \in \mathbb{Q}(y)$  が

$$R(y) = \frac{f(y)}{g(y)}, \quad f(y), g(y) \text{ は非負有理数を係数とする多項式で } g(y) \neq 0$$

の形に表されるとき  $R(y)$  は「引き算なしの表示をもつ」という. 引き算なしの表示を持つ有理式全体を記号  $\mathbb{Q}_+(y) \subset \mathbb{Q}(y)$  であらわす. たとえば

$$1 - y_1 + y_1^2 = \frac{1 + y_1^3}{1 + y_1} \in \mathbb{Q}_+(y), \quad \frac{1}{1 - y_1} \notin \mathbb{Q}_+(y).$$

$\mathbb{Q}_+(y)$  に通常の積と和を入れて得られる semifield を universal semifield とよび

$$\mathbb{P}_{univ}(y) = (\mathbb{Q}_+(y), +, \cdot)$$

であらわす.

(2) 1 元集合  $\mathbb{P} = \{1\}$  に加法  $1 \oplus 1 = 1$  を入れた trivial semifield  $\mathbb{P}_{triv}$ . このとき  $\mathcal{A}(Q, x, y) = \mathcal{A}(Q, x)$  となる.

(3)  $y = (y_1, \dots, y_n)$  の単項式全体の集合に通常の積と, 加法

$$\prod_{i \in I} y_i^{a_i} \oplus \prod_{i \in I} y_i^{b_i} = \prod_{i \in I} y_i^{\min(a_i, b_i)} \quad (a_i, b_i \in \mathbb{Z})$$

を定めた semifield を tropical semifield とよび

$$\mathbb{P}_{trop}(y) = (\{\prod_{i \in I} y_i^{a_i} \mid a_i \in \mathbb{Z}(i \in I)\}, \oplus, \cdot)$$

であらわす.

**Example 2.9.**  $A_2$  型の例を挙げます. 簡単のため  $y$  変数だけ記録すると

$$\begin{array}{ccccc} \overset{\circ}{1} \longrightarrow \overset{\circ}{2} & \xleftrightarrow{\mu_1} & \overset{\circ}{1} \longleftarrow \overset{\circ}{2} & \xleftrightarrow{\mu_2} & \overset{\circ}{1} \longrightarrow \overset{\circ}{2} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} y_1^{-1} \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{-1} \\ y_2 \cdot \frac{y_1}{1 \oplus y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{-1} \cdot \frac{y_2'}{1 \oplus y_2'} \\ \frac{1 \oplus y_1}{y_1 y_2} \end{pmatrix} & & & \\ & & & & \updownarrow \mu_1 \\ \overset{\circ}{1} \longleftarrow \overset{\circ}{2} & \xleftrightarrow{\mu_1} & \overset{\circ}{1} \longrightarrow \overset{\circ}{2} & \xleftrightarrow{\mu_2} & \overset{\circ}{1} \longleftarrow \overset{\circ}{2} \\ \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} y_2^{-1} \\ y_1 \cdot (1 \oplus y_2) \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} y_1'^{-1} \\ y_2'^{-1} \cdot \frac{y_1'}{1 \oplus y_1'} \end{pmatrix} \end{array}$$

クラスター変数と同様,  $y$  変数も「元に戻る」ことが分かります.

**Q 7.**  $A_2$  型の例で  $x$  変数を計算せよ.

**Theorem 2.18.** [FZIV]

- (1) 係数つき CA についても Laurent 性が成り立つ. すなわちすべてのクラスター変数  $x_k''$  は  $\mathbb{QP}[x_i^{\pm 1}; i \in I]$  に属する.
- (2) 相異なる  $x_k''$  たちの数が有限個であるための必要十分条件は  $Q$  が ADE 型 quiver に mutation 同値となることである.

□

**Proposition 2.19.** [FZIV]  $(Q, x, y)$  を *seed* とし,

$$\hat{y}_i := y_i \cdot \frac{\prod_{j \rightarrow i} x_j^{s_{ji}}}{\prod_{j \leftarrow i} x_j^{s_{ij}}} = y_i \cdot \prod_{j \in I} x_j^{b_{ji}}$$

と定めると, *mutation*  $\mu_k(Q, x, y) = (Q', x', y')$  のもとで  $\hat{y}_i$  は次のように変化する.

$$\hat{y}'_i = \begin{cases} \hat{y}_k^{-1} & (i = k) \\ \hat{y}_i(1 + \hat{y}_k)^{s_{ik}} & (\circ \xrightarrow{s_{ik}} \circ) \\ \hat{y}_i \left( \frac{\hat{y}_k}{1 + \hat{y}_k} \right)^{s_{ki}} & (\circ \xleftarrow{s_{ki}} \circ) \end{cases}$$

*Proof.*  $Q, Q'$  に対応する反対称行列  $(b_{ij}), (b'_{ij})$  を用いる.  $i = k$  のときは  $y'_k = y_k^{-1}$  と  $b'_{jk} = -b_{jk}$  から明らか.  $i \neq k$  のとき

$$\frac{\hat{y}'_i}{\hat{y}_i} = \frac{y'_i}{y_i} (x'_k x_k)^{-b_{ki}} \times \prod_{j \neq k} x_j^{b'_{ji} - b_{ji}}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{y'_i}{y_i} &= \begin{cases} (1 \oplus y_k)^{s_{ik}} & (\circ \xrightarrow{s_{ik}} \circ), \\ \left( \frac{y_k}{1 \oplus y_k} \right)^{s_{ki}} & (\circ \xleftarrow{s_{ki}} \circ), \end{cases} \\ x'_k x_k &= \frac{1 + \hat{y}_k}{1 \oplus y_k} \prod_{j \leftarrow k} x_j^{s_{kj}}, \\ b'_{ji} - b_{ji} &= \begin{cases} s_{ik}(b_{jk} - |b_{jk}|)/2 & (\circ \xrightarrow{s_{ik}} \circ), \\ s_{ki}(b_{jk} + |b_{jk}|)/2 & (\circ \xleftarrow{s_{ki}} \circ), \end{cases} \end{aligned}$$

に注意すればよい. □

**Proposition 2.20.** [FZIV]  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{univ}(y)$  とする.

(1) 初期 *seed*  $(B, x, y)$  から *mutation* を繰り返して得られる *seed*  $(B', x', y')$  の  $y$  変数は次の一意的な表示を持つ:

$$y'_i = \prod_{j \in I} y_j^{c'_{ji}} \cdot \prod_{j \in I} F_j(y)^{b'_{ji}}.$$

ここで

$$\begin{aligned} F_j(y) &\in \mathbb{Q}_+[y] \quad \text{の定数項は } 1, \\ c'_i &= (c'_{ji})_{j=1, \dots, n} \text{ は零でない縦ベクトルで } c'_i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \sqcup (\mathbb{Z}_{\leq 0})^n. \end{aligned}$$

以下  $c'_i$  を並べた  $n \times n$  行列を  $c' = (c'_i)$  とする.



(2)  $c'_i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$  のとき  $\varepsilon'_i = 1$ ,  $c'_i \in (\mathbb{Z}_{< 0})^n$  のとき  $\varepsilon'_i = -1$  と定める. *mutation*  $\mu_k(B', c') = (B'', c'')$  によって得られる  $c''$  は次のように書ける:

$$c''_{ji} = \begin{cases} -c'_{ji} & (i = k), \\ c'_{ji} + c'_{jk} \max(\varepsilon'_k b'_{ki}, 0) & (i \neq k) \end{cases}$$

□

縦ベクトル  $c'_i$  は「 $c$ ベクトル」、符号  $\varepsilon'_i$  は「トロピカル符号」と呼ばれます.  $x, y$  変数の *mutation* の規則に比べ、 $c$ ベクトルの規則は非常に簡単になっています. 実は以下に見るように、 $c'$  には *seed*  $(Q', x', y')$  のすべての情報が *encode* されていることがわかります.

**Definition 2.21.** *seed*  $(Q', x', y')$  にあらわれる  $y'_i \in \mathbb{Q}_+(y_1, \dots, y_n)$  に対して

$$[y'_i] := \prod_{j \in I} y_j^{c'_{ji}}$$

と定め、トロピカル  $y$  変数という. □

*Remark.* 写像

$$[\ ] : \mathbb{Q}_+(y) \rightarrow \mathbb{P}_{trop}(y), \quad \prod_{i \in I} y_i^{a_i} \cdot \frac{f_1}{f_2} \mapsto \prod_{i \in I} y_i^{a_i}$$

$$(a_i \in \mathbb{Z}, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}_+[y], f_1(0)f_2(0) \neq 0)$$

は *semifield* の写像になる.

**Theorem 2.22.**  $[P]$  初期 *seed*  $(B, x, y)$  から *mutation* で得られる任意の *seed*  $(B', x', y')$  と  $c$ ベクトルの行列  $c' = (c'_{ij})_{i \in I}$  の間には 1 対 1 の対応がある. 特にトロピカル  $y$  変数  $([y'_i])_{i \in I}$  から *seed*  $(B', x', y')$  は (原理的に) 復元できる. □

この定理の証明はクラスター圏の理論を用いる高度なものでここでは紹介できません.

**Q 8.**  $Q = \overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ} \longleftarrow \overset{3}{\circ}$ ,  $B = B_Q$ ,  $c =$  単位行列とする. ただし行列  $c$  は  $c$ ベクトルを並べたものである.  $(B, c)$  からつぎの順で *mutation* を施す:

$$(B, c) \xleftarrow{\mu_1} (B(1), c(1)) \xleftarrow{\mu_3} (B(2), c(2)) \xleftarrow{\mu_2} (B(3), c(3))$$

$$\xleftarrow{\mu_1} (B(4), c(4)) \xleftarrow{\mu_3} (B(5), c(5)) \xleftarrow{\mu_2} (B(6), c(6)) \xleftarrow{\mu_1} \dots$$

このとき  $c(1), \dots, c(6)$  を求めよ.

*Remark.* CA の一般化として「凍った」変数を含む CA with frozen variables というものもあるので、言葉だけ紹介しておきます. 「凍った」頂点のある quiver で、「凍った」頂点は *mutate* されず、対応するクラスター変数は *mutation* で変化を受けません.

### 3 差分方程式への応用

この章と次の章で CA の応用についてお話しします.

#### 3.1 Somos 4

表題の Somos 4 とは,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を「独立変数」,  $x_n$  を「従属変数」とする差分方程式

$$x_{n+4}x_n = x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}^2$$

のことで,  $n = 0, 1, 2, 3$  で初期値を与えると  $x_n$  ( $n \geq 4$ ) が順に決まって行きます.

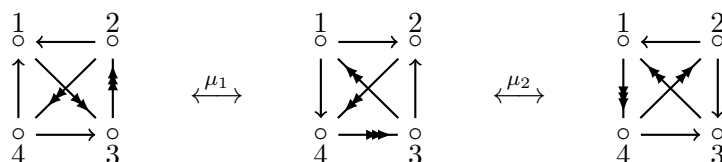
**Fact.**  $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$  ととると  $x_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ( $n \geq 4$ ) が成り立つ. 実際

$$x_4, x_5, \dots = 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1529, 8209, 83313, \dots$$

□

Somos 4 は数学者 Michael Somos が発見した数列の一つで, 1980 年代に楕円曲線の有理点に関連してでてきたものです. 上述の事実には 1990 年代に数論を用いた証明が与えられています. Fomin-Zelevinsky は CA の最初の応用例として, 初等的な証明を与える事に成功しました.

CA による定式化 [FZ-L] は以下の通りです. 次のような quiver とその mutation を考えましょう.



mutation を 1 で行うと quiver が 90 度回転されることに注目してください. このことから, 4 回の mutation の後 quiver の形はもとに戻ります. すなわち  $\nu : (1234) \mapsto (2341)$  を巡回置換として

$$(Q, x(0)) \xleftrightarrow{\mu_1} (\nu(Q), x(1)) \xleftrightarrow{\mu_{\nu(1)}} \dots \xleftrightarrow{\mu_{\nu^3(1)}} (\nu^4(Q), x(4)) = (Q, x(4))$$

いま

$$P_+ := \{(i, u) \in I \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid i - u \equiv 1 \pmod{4}\}$$

とにおいて関係式を変数  $\{x_i(u) \mid (i, u) \in P_+\}$  について書き下すとつぎのようになります. ( $P_+$  は次に mutation が行われる点の集合なので (the set of) forward mutation points とよばれます.)

$$x_i(u+4) = \frac{x_{i+1}(u+1)x_{i+3}(u+3) + x_{i+2}(u+2)^2}{x_i(u)} \quad (3.1)$$

この式で  $i$  を忘れれば Somos 4 になっています.

**Theorem 3.1.** [FZ-L] 定数  $\alpha, \beta$  を導入して (3.1) の分子を次のように一般化する.

$$x_{n+4} = \frac{\alpha x_{n+1}x_{n+3} + \beta x_{n+2}^2}{x_n}$$

このとき

$$x_n \in \mathbb{Z}_{>0}[\alpha, \beta][x_k^{\pm 1}; k = 1, 2, 3, 4] \quad (n \geq 5)$$

がなりたつ. □

これよりただちに

**Corollary 3.2.** *Somos 4* において  $x_n \in \mathbb{Z}_{>0}[x_k^{\pm 1}; k = 1, 2, 3, 4]$ . 特に  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$  ならば  $x_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . □

*Remark.*

- (1) このように, クラスタ変数で定式化される差分方程式の解は初期変数のローラン多項式になることがわかります.
- (2) 上に現れた  $Q$  のような対称性をもった quiver は「mutation periodic である」といいます. mutation periodic となる quiver は次のように分類されています.

**Theorem 3.3.** [FM] quiver  $Q$  が頂点 1 から始めて *mutation periodic* となるための必要条件は, 反対称行列  $B_Q$  の第 1 行が次の「回文」の形となることである.

$$(0, a_1, \dots, a_{n-1}), \quad a_k = a_{n-k} \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

□

たとえば Somos 4 の quiver の場合

$$B_Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)  $k \geq 4$  に対して Somos  $k$  は

$$x_{n+k}x_n = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} x_{n+k-i}x_{n+i}$$

で定義されます. このうち  $k = 4, 5$  の場合は quiver で書けます. Fomin-Zelevinsky は  $k = 6, 7$  の場合も ( quiver では書けないが) ローラン性があることを証明しています.

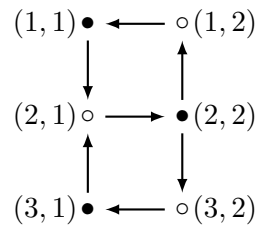
Q 9. Somos 5 の quiver を作ってみよ. 第一行は  $(0, -1, 1, 1, -1)$  となる.

### 3.2 $T$ システムと $Y$ システム

これは数理物理の量子可積分系に起源を持つ問題です. 始めに  $A_3 \times A_2$  quiver と呼ばれる次の quiver  $Q$  を考えましょう. 頂点集合を

$$I = \{(i, j); i \in A_3 \text{ 型 Dynkin 図の頂点}, j \in A_2 \text{ 型 Dynkin 図の頂点}\}$$

として, どちらかの Dynkin 図でつながっている頂点間に「ぐるぐる周り」になるよう矢印を入ると  $Q$  が得られます.



図のように頂点集合を  $I = I_\bullet \sqcup I_\circ$  と分割し,  $\mu_\bullet = \prod_{i \in I_\bullet} \mu_i$ ,  $\mu_\circ = \prod_{i \in I_\circ} \mu_i$  とします (可換なものの積です). これらの mutation を交互に施すと

$$\begin{aligned} \left( Q, x(0) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \right) &\xleftrightarrow{\mu_\bullet} \left( -Q, x(1) = \begin{pmatrix} \frac{x_{12}+x_{21}}{x_{11}} & x_{12} \\ x_{21} & \frac{x_{21}+x_{12}x_{32}}{x_{22}} \\ \frac{x_{21}+x_{32}}{x_{31}} & x_{32} \end{pmatrix} \right) \\ &\xleftrightarrow{\mu_\circ} \left( Q, x(2) = \begin{pmatrix} x_{11}(1) & \frac{x_{11}(1)+x_{22}(1)}{x_{12}(0)} \\ \frac{x_{11}(1)x_{31}(1)+x_{22}(1)}{x_{21}(0)} & x_{22}(1) \\ x_{31}(1) & \frac{x_{31}(1)+x_{22}(1)}{x_{32}(0)} \end{pmatrix} \right) \dots \end{aligned}$$

のようになります. ここで  $-Q$  は  $Q$  の全ての矢印を逆向きにした quiver のことです.

•  $T$  システム

まず係数なし CA の seed を考えましょう.  $P_+ = (I_\bullet \times 2\mathbb{Z}) \cup (I_\circ \times (2\mathbb{Z} + 1))$  として, つぎの差分方程式が書けます.

$$x_{ij}(u+2) = \frac{\prod_{b \sim j} x_{ib}(u+1) + \prod_{a \sim i} x_{aj}(u+1)}{x_{ij}(u)}$$

右辺第 1 項の  $b \sim j$  は  $(i, b)$  が  $(i, j)$  に矢印でつながっていることを表します. 第 2 項の  $a \sim j$  も同様です. これを  $A_3 \times A_2$  型  $T$  システムといいます.

•  $Y$  システム

おなじ quiver で係数のみの seed  $(Q, y)$  を考え semifield として  $\mathbb{P}_{univ}(y)$  をとると  $P_+$  上の差分方程式

$$y_{ij}(u+2) = \frac{1}{y_{ij}(u)} \frac{\prod_{b \sim j} (1 + y_{ib}(u+1))}{\prod_{a \sim i} (1 + y_{aj}(u+1)^{-1})}$$

が得られます. これを  $A_3 \times A_2$  型  $Y$  システムと言います. 確認のため実際に mutation をやってみると

$$\begin{aligned} & \left( Q, y(0) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} \right) \\ \xleftrightarrow{\mu_\bullet} & \left( -Q, y(1) = \begin{pmatrix} y_{11}^{-1} & y_{12}(1+y_{11})\frac{y_{22}}{1+y_{22}} \\ y_{21}(1+y_{22})\frac{y_{11}}{1+y_{11}}\frac{y_{31}}{1+y_{31}} & y_{22}^{-1} \\ y_{31}^{-1} & y_{32}(1+y_{31})\frac{y_{22}}{1+y_{22}} \end{pmatrix} \right) \\ \xleftrightarrow{\mu_\circ} & \left( Q, y(2) = \begin{pmatrix} y_{11}^{-1}(1+y_{12}(1))\frac{y_{21}(1)}{1+y_{21}(1)} & y_{12}^{-1}(1) \\ y_{21}^{-1}(1) & y_{22}^{-1}(1+y_{21}(1))\frac{y_{12}(1)}{1+y_{12}(1)}\frac{y_{32}(1)}{1+y_{32}(1)} \\ y_{31}^{-1}(1+y_{32}(1))\frac{y_{21}(1)}{1+y_{21}(1)} & y_{32}^{-1} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

となります.

*Remark.* 一般に,  $ADE$  型の Dynkin 図形から  $X_m, X_n$  を任意に 2 つとり,  $X_m \times X_n$  型の quiver  $Q$  から  $X_m \times X_n$  型の  $T/Y$  システムを作る事ができます. (数理論理に現れるのは一方が  $A$  型の場合だけです.)

**Theorem 3.4** (Zamolodchikov 予想 '90s).  $[Ke], [IIKKS]$   $h, h'$  をそれぞれ  $X_m, X_n$  の Coxeter 数とすると,  $X_m \times X_n$  型  $T/Y$  システムは周期  $2(h+h')$  を持つ. すなわち  $\forall (i, j) \in I_{X_m} \times I_{X_n}$  について

$$\begin{aligned} x_{ij}(u+2(h+h')) &= x_{ij}(u), \\ y_{ij}(u+2(h+h')) &= y_{ij}(u). \end{aligned}$$

□

この定理は  $A$  型の場合に Volkov が力技による初等的な証明を与えていますが,  $DE$  型の場合に計算で示すのはまず不可能だろうと思われます.

*Remark.*

- (1)  $A_3 \times A_2$  型の場合, 周期は  $2(4+3) = 14$  となります.
- (2) 単独の  $X_m$  型  $T/Y$  システムも考えられます. つまり  $X_m \times A_1$  型を考えればよいわけです. その場合周期は  $2(h+2)$  となります.
- (3)  $(h+h')$  回 mutation を行うと「反転」がおこります. すなわち,  $X_m$  型,  $X_n$  型の Dynkin 図の自己同型をそれぞれ  $\nu, \nu'$  として

$$x_{ij}(u+h+h') = x_{\nu(i)\nu'(j)}(u)$$

が成り立ちます.  $h+h'$  を半周期といいます.

定理 3.4 の証明は大変なので, 以下アウトラインを紹介します. (中西さんの review [N] に大変わかりやすく書いてあります.)

まず定理 2.22 に訴えると

$$\begin{array}{c} \text{seed } (Q, x, y) \text{ の } \mu_\bullet \mu_\circ \text{ 方向の mutation の周期性} \\ \iff \text{トロピカル } Y \text{ システムの周期性} \\ \text{Theorem 2.22} \end{array}$$

であることに注意します. ここで semifield として  $\mathbb{P}_{univ}(y)$  をとれば  $Y$  システムの,  $\mathbb{P}_{triv}$  をとれば  $T$  システムの周期性がそれぞれ従います.

そこで証明はトロピカル  $Y$  システムの周期性に帰着します. 後者の鍵になる事実は次の 2 つです.

Key A 命題 2.20(2) により  $\mu_k(B', y') = (B'', y'')$  であるとき,  $y'$  のトロピカル符号を  $(\varepsilon'_k)_{k \in I}$  とすればトロピカル  $y$  変数の mutation は次の式で与えられました.

$$[y''_i] = \begin{cases} [y'_k]^{-1} & (i = k) \\ [y'_i][y'_k]^{\max(\varepsilon'_k b'_{ki}, 0)} & (i \neq k) \end{cases}$$

2 番目の場合  $\max(\dots)$  が効いてくるのは  $\varepsilon'_k$  と  $b'_{ki}$  が同符号の場合だけであることに注意. これより,  $\mu_\bullet$  または  $\mu_\circ$  を行ったときの変化は

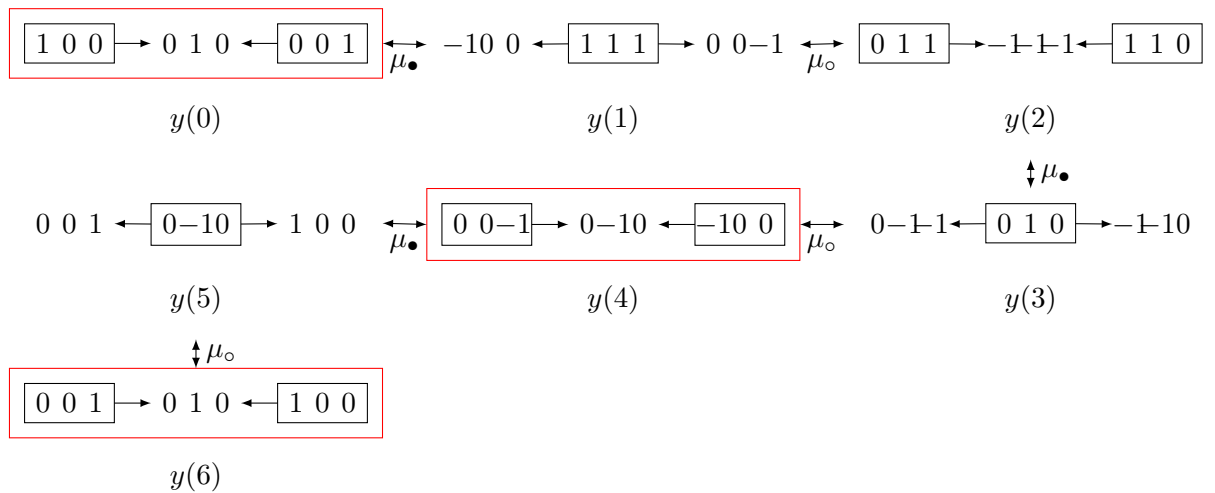
$$[y_i(u+1)] = \begin{cases} [y_i(u)]^{-1} & (i \in I_\bullet/I_\circ) \\ [y_i(u)] \prod_{\substack{k \in I_\bullet/I_\circ \\ (*)}} [y_k(u)] & (i \notin I_\bullet/I_\circ) \end{cases}$$

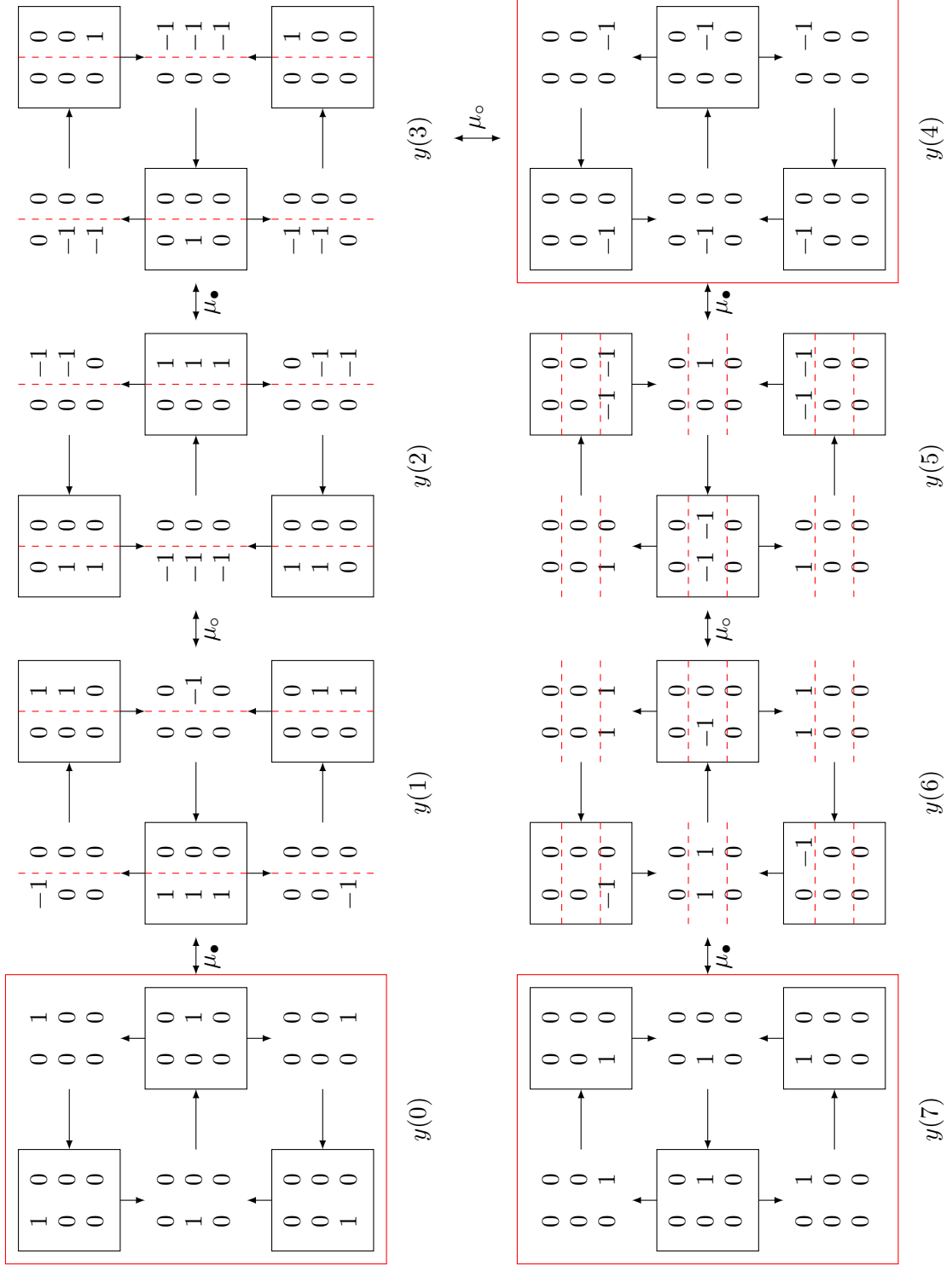
ここで 付加条件 (\*) は

$$\begin{array}{l} \circ \xrightarrow{b'_{ki}} \circ \text{ のとき } \varepsilon'_k > 0, \\ \circ \xleftarrow{b'_{ik}} \circ \text{ のとき } \varepsilon'_k < 0, \end{array}$$

をあらわします.

たとえば  $A_3 (= A_3 \times A_1)$  と  $A_3 \times A_2$  の場合の様子は図のようになります. 図では, quiver の各頂点に  $c$  ベクトルが書いてあり, mutation で変化する quiver と  $c$  ベクトルの様子を示しています.  $c$  ベクトルの変わり方に注目してください. 特に  $A_3 \times A_2$  型の場合は特徴が分かりやすく,  $y(0)$  から  $y(4)$  までは  $A_3$  型の動き (縦方向), その後は  $A_2$  型の動き (横方向) となり,  $y(7)$  は  $y(0)$  の「反転」となります.  $A_3$  型の場合は, やはり  $y(0)$  から  $y(4)$  までは  $A_3$  型の動き, その後は  $A_1$  型の動きになり,  $y(6)$  が  $y(0)$  の反転です.







## Key B

$X_n$  型の時次のことが成り立ちます.

### (1) 写像

$$\varphi : \{[y_i(u)] \mid (i, u) \in P_+\} \rightarrow \Phi_{\geq -1} = \Phi_+ \sqcup (-\Pi), \quad \prod_{i \in I} y_i^{n_i} \mapsto \pm \sum_{i \in I} n_i \alpha_i$$

が well defined になる. 符号  $\pm$  は quiver の向きの取り方により一方に決まります.

### (2) 上の写像について

$$\varphi : [y_i(u+2)] \mapsto \tau_+ \tau_- \left( \sum_{i \in I} n_i \alpha_i \right)$$

が成り立つ.

なぜ Coxeter 数が出てくるのかはこの (2) の性質から納得できます.  $\beta \in \Phi_{\geq -1}$  について  $k_+(\beta) + k_-(\beta) = h + 1$  という関係があったことを思い出しましょう.

*Remark.* (かなり専門家向けの注意です)

(1)  $A_m \times X_n$  型の  $T/Y$  システムのことを, 数理物理では「レベル  $(m+1)$  の  $X_n$  型  $T/Y$  システム」といいます. レベル  $(m+1)$  の  $BCFG$  型  $T/Y$  システムもあります [KNS]. この場合も各辺のウエイトがすべて 1 であるような quiver による実現ができ ( $A_m \times X_n$  のような形にはなりません), 周期性も示されています [HKKN1, HKKN2]. この場合, 半周期は  $h^\vee + m + 1$  ( $h^\vee$  は dual Coxeter number) になります.

(2) 命題 2.19 によれば,  $\hat{y}_i = y_i \prod_{j \in I} x_j^{b_{ji}}$  に対する mutation の式は  $y_i$  に対するものと同じ形になるのです. 特に semifield として  $\mathbb{P}_{triv}$  をとると  $\hat{y}_i = \prod_{j \in I} x_j^{b_{ji}}$  となり, これが  $Y$  システムを満たします.

つまり  $T$  システムの解から  $Y$  システムの解が作れていることになるわけです. ただし, 一般にはこうしてできた解は一般解にはなりません. (quiver  $Q$  に対応する反対称行列  $B_Q$  が可逆な場合に限り一般解となる, ということがわかっています.)

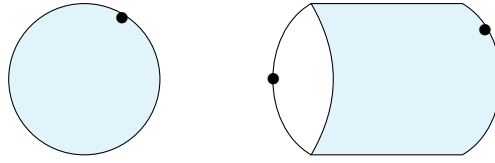
## 4 双曲幾何への応用

この章では CA の双曲幾何への応用をお話しします.

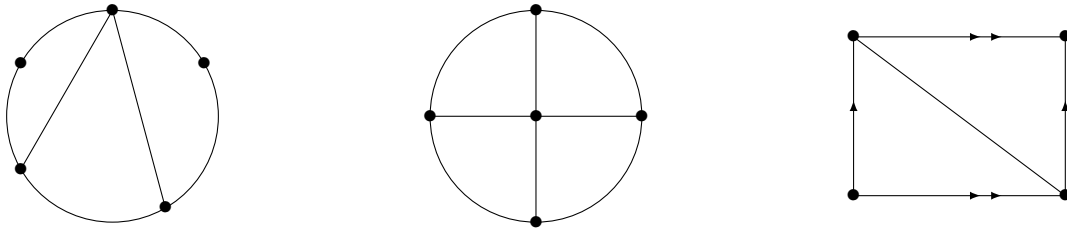
### 4.1 点つき曲面の三角形分割

#### • 点つき曲面

$\Sigma$  を向き付けられた曲面,  $\mathcal{P} = \{P_k\}_{1 \leq k \leq m}$  を  $\Sigma$  上の点の集合とします.  $\Sigma$  には境界があってもよく, ただし  $\partial \Sigma \neq \emptyset$  の場合, 境界の各連結成分は  $P_k$  のうち少なくとも 1 点を含むものとして. 組  $(\Sigma, \mathcal{P})$  を「点つき曲面」と言います.



$(\Sigma, \mathcal{P})$  の三角形分割  $T$  とは,  $P_1, \dots, P_m$  を頂点とする topological な三角形 (辺と頂点がそれぞれ 3 個であるもの) への分割のことです.



左と真中の図は境界のある円板の三角形分割です. 右の図は上下, 左右をそれぞれ同一視するので, 1 点つきトーラスの三角形分割を与えています.

• quiver との対応

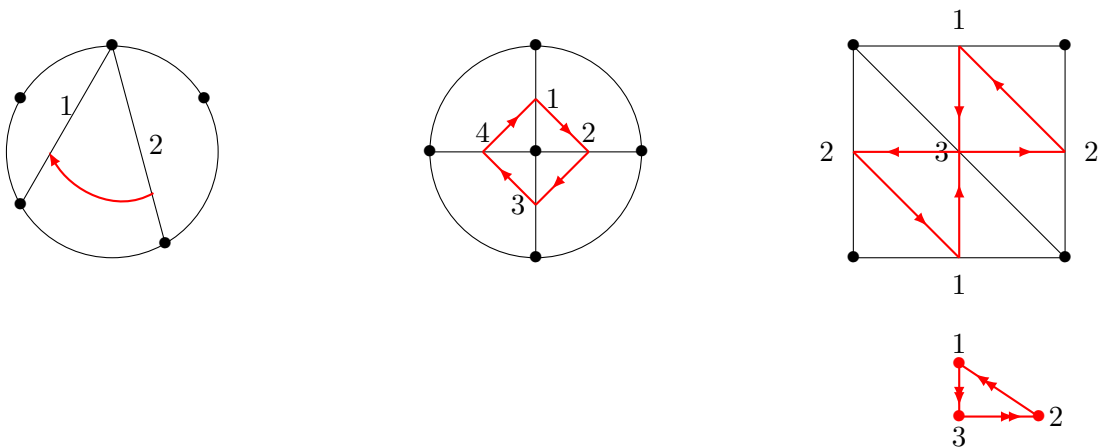
三角形分割  $T$  から quiver  $Q_T$  が定まります. 規則は次の通りです.

$$\begin{aligned} \Sigma \setminus \partial \Sigma \text{ の辺} &\longleftrightarrow Q_T \text{ の頂点} \\ \text{辺 } j, i \text{ が } T \text{ の頂点を共有} &\longleftrightarrow \begin{matrix} \circ & \longrightarrow & \circ \\ j & & i \end{matrix} \end{aligned}$$

ここで辺  $j$  から  $i$  が時計回りの向きであるとき,  $j$  から  $i$  にむけて矢印をつけます.



少し例を挙げましょう.

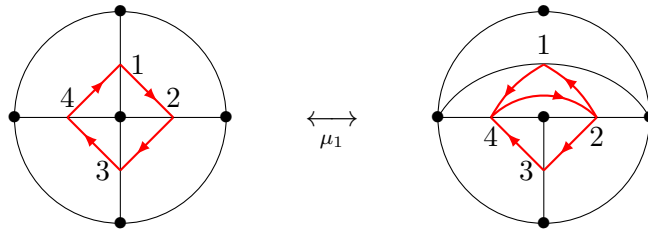


右の例では上下, 左右をそれぞれ同一視しているので, 対応する quiver の矢印は下の図のように2本になることに注意してください.

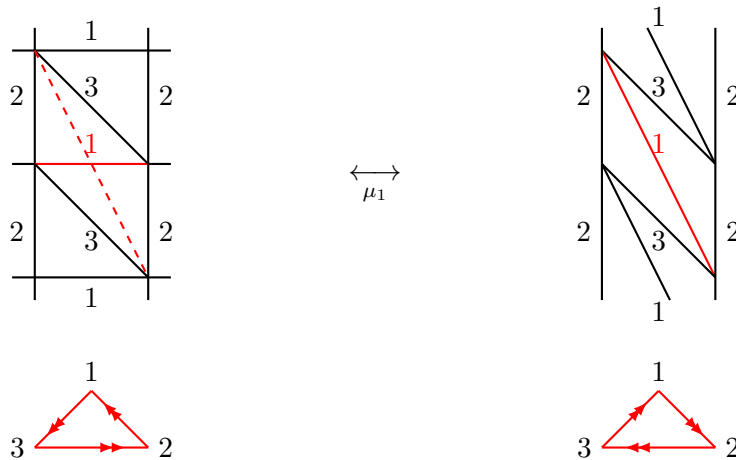
なお, 勝手な quiver から逆に三角形分割が決まるというわけではありません.

• flip と mutation

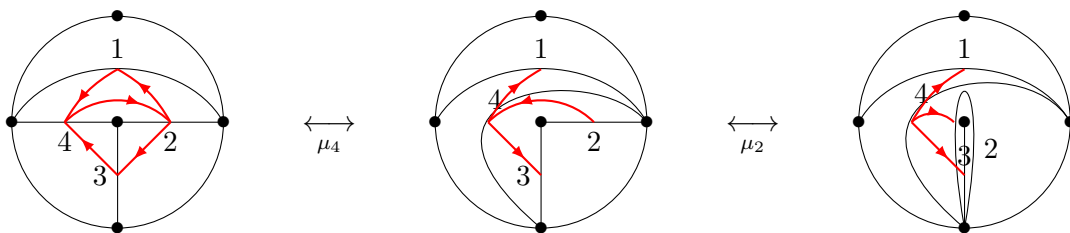
四辺形の対角線をとりにかえるという操作を flip と言います.



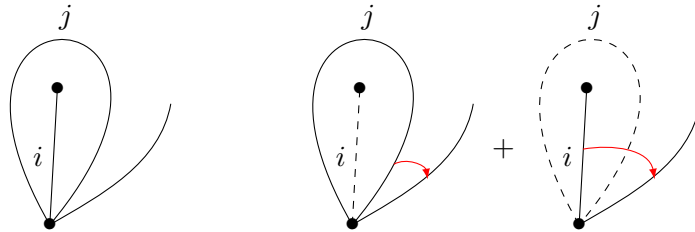
図を見ると, 対応する quiver では mutation の操作になっていることがわかりますね. もう一つ例をやってみましょう. これは先の3番目の例と同じですが, トーラスを  $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$  と同一視した図で表しています.



上の一つ目の例では少し注意が必要です. 1の辺の flip に続いて4の辺, 2の辺における flip を続けると, self-folded triangle (2辺を同一視した三角形) が現れ, これまでのルールではこの三角形分割に対応する quiver を決められなくなります.



そこで「例外のルール」として、



の形の図があるときは、図のように2つの矢印を描いて重ね合わせることにします。このように決めれば対応する quiver の mutation と整合します。

以上の規則のもとに、一般に次のことがわかっています。

**Fact.** [FST] など  $(\Sigma, \mathcal{P})$  を点付き曲面,  $T, T'$  をその三角形分割とする。

- (1)  $T$  と  $T'$  が辺  $i$  における flip でうつりあうならば、対応する quiver  $Q_T$  と  $Q_{T'}$  は mutation  $\mu_i$  でうつりあう：

$$T \xleftrightarrow[i]{\text{flip}} T' \implies Q_T \xleftrightarrow[\mu_i]{\text{mutation}} Q_{T'}$$

- (2)  $\mathcal{B}(\Sigma, \mathcal{P})$  を  $Q_T$  の mutation 同値類とすると、 $\mathcal{B}(\Sigma, \mathcal{P})$  は  $T$  の取り方によらず  $(\Sigma, \mathcal{P})$  のみで定まる。

□

**Example 4.1.**  $D$  を円板,  $\mathcal{P}$  を  $\partial D$  上の  $(n+3)$  点とするとき、 $\mathcal{B}(D, \mathcal{P})$  は  $A_n$  型 quiver の mutation 同値類になります。

また  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n, P_{n+1}\}$ ,  $P_i \in \partial D$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $P_{n+1} \in D \setminus \partial D$  のとき、 $\mathcal{B}(D, \mathcal{P})$  は  $D_n$  型 quiver の mutation 同値類になります。

一方  $E_6, E_7, E_8$  型に対応する点付き曲面は存在しないことが知られています。

**Q 10.**  $P_i \in \partial D$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) のとき  $\mathcal{B}(D, \{P_i\}_{1 \leq i \leq 6})$  が  $A_3$  型 quiver の mutation 同値類と一致することを確かめよ。

## 4.2 2次元双曲幾何

計量を導入することにより, flip と mutation の対応は quiver だけでなく  $x$  変数の対応にまで拡張されることを説明します.

複素上半平面

$$\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

に, 計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を入れて考え, これを上半平面モデルと呼びます.  $\mathbb{H}^2$  に「境界」 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  を付け加えて

$$\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

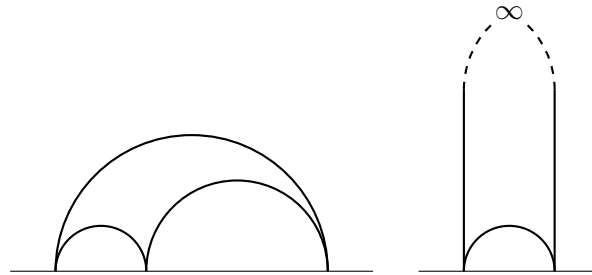
とします. この計量に関する  $\mathbb{H}^2$  の測地線は, 境界  $\partial\mathbb{H}^2$  に中心を持つ半円 (および半径無限大の極限として,  $\partial\mathbb{H}^2$  に直交する半直線) になります.

$\overline{\mathbb{H}^2}$  には群  $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$  が一次分数変換

$$PSL_2(\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad z \mapsto Az = \frac{az + b}{cz + d}$$

によって働くことに注意しましょう.

頂点が  $\partial\mathbb{H}^2$  に含まれ, 辺が測地線からなる三角形を理想三角形といいます.



理想三角形

次のことは簡単にわかります.

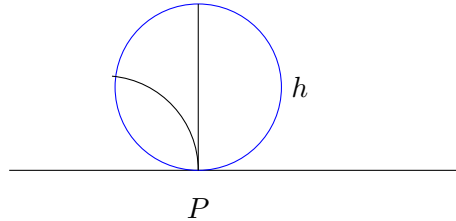
**Lemma 4.1.** (1)  $ds^2$  は  $PSL_2(\mathbb{R})$  不変である.

(2) すべての理想三角形は互いに合同で, その面積は  $\pi$  となる. □

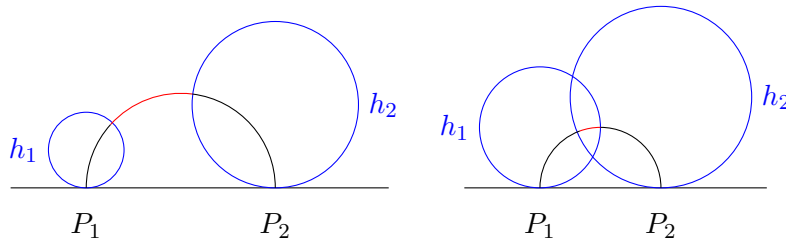
Q 11. Lemma 4.1 を証明せよ.

•  $\lambda$  長さ

$\partial\mathbb{H}^2$  に接する  $\overline{\mathbb{H}^2}$  内の円周を horocycle といいます.



$h_1, h_2$  を, それぞれ  $P_1, P_2$  で  $\partial\mathbb{H}^2$  に接する horocycle とします.  $P_1, P_2 \in \partial\mathbb{H}^2$  を通る測地線の,  $h_1$  と  $h_2$  を結ぶ部分の弧 (赤の部分) の長さを  $\ell(h_1, h_2)$  であらわします. ただし右の図のように  $h_1, h_2$  が交点を持つ場合には  $\ell(h_1, h_2)$  は長さに符号をつけたものと定義します.



このとき  $\lambda(h_1, h_2) := \exp(\frac{1}{2}\ell(h_1, h_2))$  と定め, これを  $h_1, h_2$  から決まる  $\lambda$  長さといえます. 点の位置に加えて horocycle を attach した ('decorated') 状況から「長さ」を定めていることに注意してください.  $\lambda$  長さについては次のことが成り立ちます.

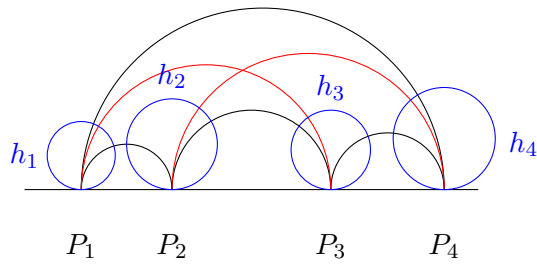
**Lemma 4.2.**  $P_1 = (x_1, 0), P_2 = (x_2, 0)$  とし,  $P_i$  における horocycle  $h_i$  の半径を  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) とおく. このとき

$$\lambda(h_1, h_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{4r_1 r_2}}.$$

**Proposition 4.3.** [Pe] 図のような  $\overline{\mathbb{H}^2}$  における理想四角形に対して

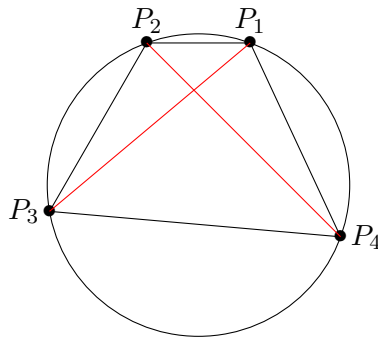
$$\lambda(h_1, h_3)\lambda(h_2, h_4) = \lambda(h_1, h_2)\lambda(h_3, h_4) + \lambda(h_2, h_3)\lambda(h_1, h_4)$$

が成り立つ. □



双曲 Ptolemy の定理

初等幾何学における Ptolemy の定理とは、「円周上の 4 点  $P_1, \dots, P_4$  を頂点とする四角形について、対角線の長さの積は相対する 2 辺の長さの積の和に等しい:  $|P_1P_3||P_2P_4| = |P_1P_2||P_3P_4| + |P_2P_3||P_1P_4|$ 」という内容でした. 命題 4.3 は Ptolemy の定理の双曲幾何版にあたります.

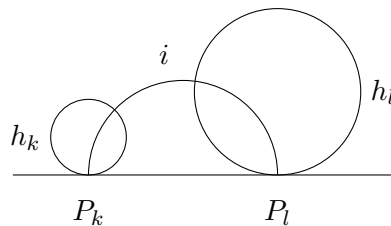


Ptolemy の定理

$\lambda$  長さを考えることによって, flip と mutation は quiver だけでなく  $x$  変数をこめて対応していることがわかります.

**Fact.** [FST]  $(\Sigma, \mathcal{P}) \leftrightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$  は点つき曲面の上半平面への埋め込みであって  $P_i \in \partial\mathbb{H}^2$  ( $\forall P_i \in \mathcal{P}$ ) となっているとする.  $P_i$  で  $\partial\mathbb{H}^2$  に接する horocycle  $h_i$  を固定し,  $(\Sigma, \mathcal{P})$  の三角形分割  $T$  に seed  $(Q_T, x)$  を対応させる. ただし  $x_i = \lambda(h_k, h_l)$  は辺  $i$  の  $\lambda$  長さをあらわす.

このとき  $T$  と  $T'$  が辺  $i$  における flip でうつりあうならば, 対応する seed  $(Q_T, x)$  と  $(Q_{T'}, x')$  は mutation  $\mu_i$  でうつりあう.  $\square$



$\square$

### 4.3 3次元双曲幾何

曲面の場合、三角形分割は直感的にもわかりやすいものです。たとえば左の図は3点つき球面、右の図は1点つきトーラスの三角形分割です。

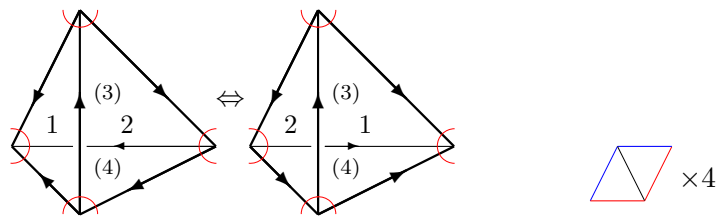


貼り合わせ方を変えると曲面が変わる事に注意してください。(たとえばオイラー数を計算してみるとそれぞれ  $\chi = 3 - 3 + 2 = 2$ ,  $\chi = 1 - 3 + 2 = 0$  となっています。)

#### • 3次元多様体と四面体分割

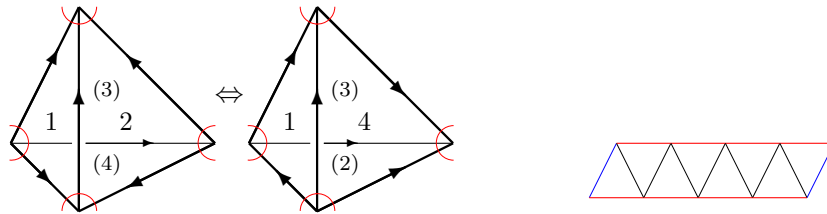
高次元になると、たとえば3次元球面  $S^3$  の四面体分割であっても、なかなか直感的にはつかみにくくなります。

四面体2個の頂点の近傍を切り落として貼付けると、3次元球面から4個の球体を除いた図形ができます。同じ番号の面どうし、边上の矢印の向きを合わせて貼り合わせます。右側に描かれた図では切り落とした部分との境界を表しています。赤い辺どうし、青い辺どうしをそれぞれ同一視すると球体の表面になることが分かるでしょう。





より難易度の高い貼り合わせをやってみましょう.



この貼り合わせによって得られるのは  $S^3 \setminus K$ ,  $K$  は次のような結び目 ( 8 の字結び目 ) を膨らませたものになっています.

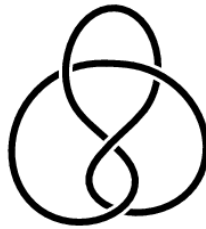


図 6: 8 の字結び目

境界が右側に描かれた図のようなトーラスになることは比較的簡単に分かるのですが, このトーラスがどう絡まっているかを見るには訓練が必要です.

• 3次元双曲空間  
空間

$$\mathbb{H}^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

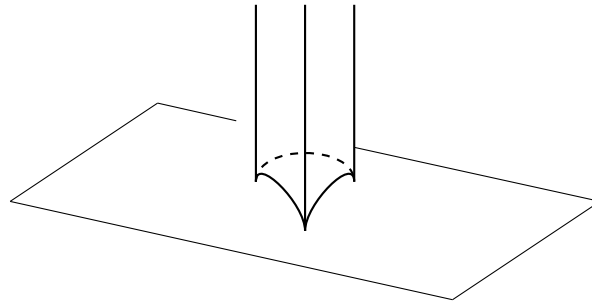
に計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

を入れたものを上半空間モデルといいます。  $\mathbb{H}^3$  に境界  $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を付け加え  $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  とします。  $\partial\mathbb{H}^3$  には群  $PSL_2(\mathbb{C})$  が作用しています。

上半空間の「直線」は  $xy$  平面に直交する半円周、「平面」は  $xy$  平面に直交する半球面です（半径無限大の極限として、それぞれ  $xy$  平面に直交する半直線ないし半平面を含みます）。

理想四面体とは  $\overline{\mathbb{H}^3}$  の四面体であって頂点が  $\partial\mathbb{H}^3$  に含まれ、辺は  $\mathbb{H}^3$  の直線、面は  $\mathbb{H}^3$  の平面となるものを言います。次の図は頂点のうち一つが  $\infty$  にある場合です。

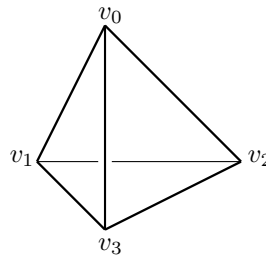


理想4面体

$\Delta$  を理想四面体とし、ひとつの頂点  $v_0$  の上から見て残りの3頂点を時計回りの順に  $v_1, v_2, v_3$  とします。このとき、4点の複比

$$z(\Delta) := (v_2, v_3; v_1, v_0) = \frac{(v_2 - v_1)(v_3 - v_0)}{(v_3 - v_1)(v_2 - v_0)} \in \mathbb{C}$$

を  $\Delta$  の modulus といいます。



さらに次の関数を導入しておきましょう.

$$D(z) := \operatorname{Im} Li_2(z) + \arg(1-z) \cdot \log|z|,$$

$$Li_2(z) := - \int_0^z \log(1-s) \frac{ds}{s}.$$

$D(z)$  を Bloch-Wigner 関数,  $Li_2(z)$  を Euler の dilogarithm 関数といいます.

**Fact.**

- (1)  $z(\Delta)$  は  $PSL_2(\mathbb{C})$  の作用で不変である. 理想四面体  $\Delta$  の双曲体積は公式

$$\operatorname{Vol}(\Delta) = D(z(\Delta))$$

で与えられる.

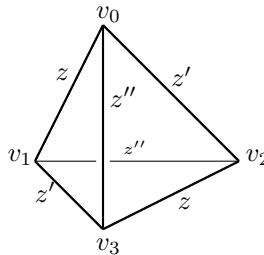
- (2)  $PSL_2(\mathbb{C})$  の作用で  $(v_0, v_1, v_3)$  を  $(\infty, 0, 1)$  にこの順で写すとき,  $v_2$  は  $z(\Delta)$  に写される. よって辺  $v_0v_1$  における二面角は  $\arg z(\Delta)$  である.

- (3)  $\operatorname{Im} z(\Delta) > 0 \iff D(z(\Delta)) > 0$  が成り立つ.

- (4)  $z' = 1 - z, z'' = 1/(1-z)$  とおくと  $D(z) = D(z') = D(z'')$ .

□

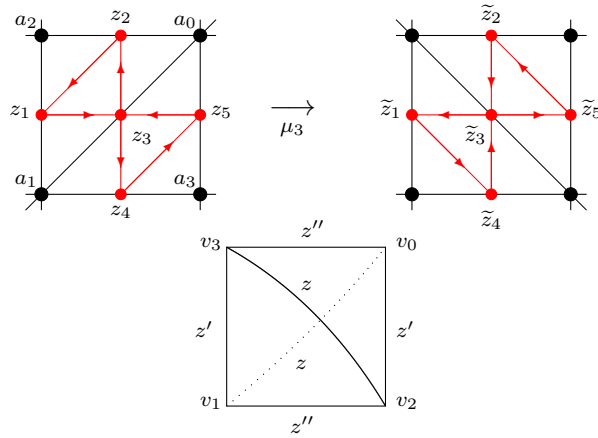
*Remark.*  $(v_1, v_2, v_3)$  の取り方を変えると  $\Delta$  の modulus は  $z'(\Delta), z''(\Delta)$  となるが,  $\operatorname{Vol}(\Delta)$  はその取り方に依らないことが上の Fact (4) から分かる. Fact (2) に基づき, 下図のように modulus  $z(\Delta)$  を辺  $v_0v_1$  に assign する. 他の辺にも  $z'(\Delta)$  または  $z''(\Delta)$  を assign する. 特に向かい合う辺に assign される数は等しい.



•  $\Delta$  の貼付けと flip

$\mathbb{H}^3$  内に「点付き理想曲面の分割」, すなわち頂点が  $\partial\mathbb{H}^3$  に含まれ, 辺は直線, 面は平面からなる曲面を考えましょう. はじめから「分割された曲面」のみを考えます. 曲面にあらわれる各辺に変数  $z_i, \tilde{z}_i$  を assign しておきます.  $\arg z_i$  は辺  $i$  に沿った2面角を表します.

このような曲面に「理想四面体を貼付ける」操作を flip と言います. 上から見た図と考えると見やすいです. 2次元の場合と違って, flip によって曲面の形が変わってしまうことに注意してください.



貼付ける理想四面体の辺にそれぞれ  $z, z', z''$  を assign します. 向かい合う辺には同じ変数に対応し, また  $z' = 1 - 1/z, z'' = 1/(1 - z)$  でした.

貼り合わせの前後で, これらの変数がどう変化するかを見ておきましょう. 合成により 2 面角は和になるので, 複素数の積に対応することから, つぎのようになります:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \\ \tilde{z}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z' \\ z_2 z'' \\ z \\ z_4 z'' \\ z_5 z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(1 - z_3) \\ z_2 \frac{1}{1 - z_3^{-1}} \\ z_3^{-1} \\ z_4 \frac{1}{1 - z_3^{-1}} \\ z_5(1 - z_3) \end{pmatrix}$$

辺 3 における貼り合わせ条件  $z z_3 = 1$  から理想四面体の形が決まってしまう, 最後の式になりました. (曲面上の点を  $a_0, a_1, a_2, a_3$  とおくと辺  $a_0 a_1$  上の複素数  $z_3$  が  $z_3 = (a_2, a_3; a_1, a_0)$  と表されることに注意する. この曲面に四面体をぴったり貼り付けると  $v_0 = a_0, v_1 = a_1, v_2 = a_3, v_3 = a_2$  となるので  $z = (a_3, a_2; a_1, a_0) = 1/z_3$  が得られ, これが貼り合わせ条件となる.)

この式を見ると, ( $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{univ}$  とした) CA における  $y$  変数の mutation 規則と極めて良く似ています! 実際, 対応する quiver の mutation をやってみると

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1(1 + y_3) \\ y_2 \frac{1}{1 + y_3^{-1}} \\ y_3^{-1} \\ y_4 \frac{1}{1 + y_3^{-1}} \\ y_5(1 + y_3) \end{pmatrix}$$

でした. よって  $z_i = -y_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) と対応させればよいことが分かります.

**Fact. [NTY]**  $T, T'$  を点付き理想曲面の分割とする.  $T, T'$  が辺  $i$  における flip でうつり合うならば, 対応する seed  $(Q_T, y)$  と  $(Q_{T'}, y')$  は mutation  $\mu_i$  でうつりあう. 貼付ける理想四面体の modulus を  $z(\Delta)$  とすれば,  $z(\Delta) = 1/z_i, y'_i = -1/z_i$  である.  $\square$

ここまでをまとめておきましょう. 対応表を作ってみると次のようになります.

2D	3D	CA
三角形分割	三角形分割	quiver
flip	flip	mutation
$\lambda$ 長さ	(Zickert の変数)	$x$ 変数
(Fock 座標)	二面角	$y$ 変数
Ptolemy 関係式	貼り合わせ条件	CA から自然に決まる

上の表のうちで Fock 座標と Zickert の変数については触れませんでした,  $x$  変数,  $y$  変数の対応物がそれぞれの場合にあるということだけ述べておきます.

さて, 8 の字結び目  $K$  の補集合  $M = S^3 \setminus K$  が, 2 つの, 「頂点を切り落とした」四面体の貼り合わせとして得られた事を思い出しましょう. 理想四面体であれば頂点は  $\partial \mathbb{H}^3$  にあるので,  $\mathbb{H}^3$  では自動的に頂点が切り落とされているわけです. そうするとつぎのようなことが期待できそうです.

- (1) 貼り合った四面体が全て理想四面体ならば  $M$  は双曲構造を持つ. このとき体積  $Vol(M)$  は  $K$  の不変量になる. (実際, W. Thurston はこのことを示した)
- (2) さらに貼り合わせが点付き曲面の flip であらわせるならば, 貼り合わせ条件は自動的に満たされる. そうすると  $Vol(M)$  は「自動的に」求まる?

つまり不変量  $Vol(M)$  が CA の algorithm によって計算可能になりそうです. これを次の節で検討します.

#### 4.4 $S^1$ 上の 1 点穴あきトーラス束

種数 1 の 1 点つき曲面  $\Sigma_{1,1}$  は, 平面から格子点をのぞいて格子による平行移動で同一視した空間と見なす事ができました:

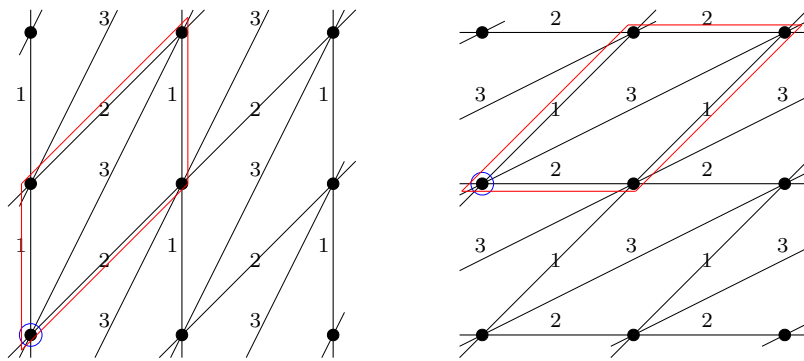
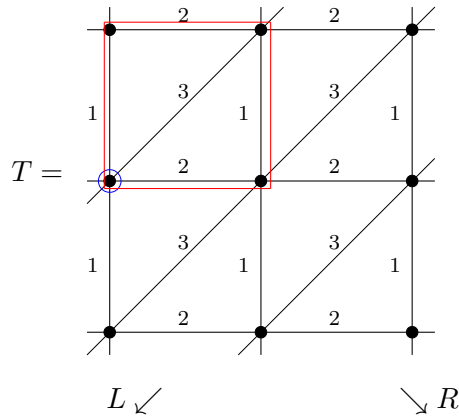
$$\Sigma_{1,1} \sim (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) / \mathbb{Z}^2$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  には自然に  $SL(2, \mathbb{Z})$  が働いています. 以下では次の 2 つの作用を用います.

$$R : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix},$$

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}.$$

次の図は  $\Sigma_{1,1}$  の三角形分割  $T$  と,  $T$  が  $R$  と  $L$  の作用で移る様子を  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  で見たものです. ただし青丸のついた点は  $\mathbb{R}^2$  内の原点を表し, 同じ番号のついた辺は  $\mathbb{Z}^2$  で割ったとき同一視されます. 赤線で囲んだ部分は  $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) / \mathbb{Z}^2$  の基本領域を表します.



さて,  $R$  と  $L$  のいくつかの積を  $\varphi$  として

$$M_\varphi := (\Sigma_{1,1} \times [0, 1]) / ((z, 0) \sim (\varphi(z), 1))$$

とおくことによって  $S^1 = [0, 1] / (0 \sim 1)$  上の  $\Sigma_{1,1}$  束ができます.

**Fact.**

- (1)  $S^1$  上の  $\Sigma_{1,1}$  束はすべて  $M_\varphi$  の形に書くことができる.
- (2)  $M_\varphi$  が 3次元双曲多様体となる必要十分条件は  $\varphi$  が次の形になることである :

$$\varphi = R^{s_1} L^{t_1} \cdots R^{s_n} L^{t_n} \quad (s_i, t_i \in \mathbb{Z}_{>0}, i = 1, \dots, n)$$

□

**Example 4.2.**  $\varphi = RL$  のときは  $M_\varphi = S^3 \setminus (8 \text{ の字結び目})$  であることが知られています (  $M_\varphi$  が  $S^3$  内の結び目の補空間になるのはこの場合だけです ).

$R$  と  $L$  の作用を quiver に対する作用に翻訳してみましょう. まず, 先の図に描かれた三角形分割  $T$  を辺 1 で flip すると, そのままでは辺の番号付けが  $R(T)$  とは異なります. そこで辺 2 と 3 の番号付けを入れ替えると  $R(T)$  に一致するものが得られます. 対応する quiver  $Q := Q(T)$  への操作を考えると  $R = s_{1,3} \circ \mu_1$  と書けることが分かります.



同様にして  $L = s_{2,3} \circ \mu_2$  も得られます.  $R, L$  の作用は  $\mathbb{R}^2$  の線形変換なので基本領域内の辺の番号付けは不変ですが, それに対応して  $R(Q) = L(Q) = Q$  が成り立っていることに注意してください.

**Definition 4.4.**

$$\varphi = F_1 F_2 \cdots F_c \quad (F_k = R \text{ or } L, \quad c = \sum_{i=1}^n (s_i + t_i))$$

とあらわし,  $y[1], \dots, y[c+1]$  を

$$y[1] := y, \quad y[k+1] = F_k(y[k]) \quad (k = 1, \dots, c)$$

によって定める.  $\{y[k]\}_{k=1, \dots, c+1}$  を  $\varphi$  の  $y$  パターンという.  $F_k$  によって生ずる理想四面体を  $\Delta[k]$ , その *modulus* を  $z[k]$  とする.  $\square$

**Theorem 4.5.**  $\varphi$  の  $y$  パターンにおいて

$$y[1] = (y_1, y_2, \frac{1}{y_1 y_2})$$

とする. 周期境界条件  $y[1] = y[c+1]$  が成り立つものとし, さらにすべての  $k = 1, \dots, c$  について

$$z[k] = \begin{cases} -\frac{1}{y[k]_1} & (F_k = R) \\ -\frac{1}{y[k]_2} & (F_k = L) \end{cases}$$

が四面体成立条件  $\text{Im } z[k] > 0$  が満たされると仮定する. このとき

$$\text{Vol}(M_\varphi) = \sum_{k=1}^c D(z[k]).$$

$\square$

*Remark.* つぎのことが知られています.

- (1) 定理における  $y[1]$  の選び方 (一般に一つの頂点からでている辺の  $y$  変数の積が 1 であること) と, mutation から来る自動的な貼り合わせ条件により, 理想四面体がきれいに貼り合うことが保証される [NTY].
- (2)  $M_\varphi$  が双曲的でないことと, 定理の条件をみたま  $y_1, y_2$  が存在しないことは同値である.

**Example 4.3.**  $\varphi = RL$  の場合,  $y[1] \xrightarrow{R} y[2] \xrightarrow{L} y[3]$  の具体形はつぎのようになります.

$$y[2] = \begin{pmatrix} y_3(1+y_1^{-1})^{-2} \\ y_2(1+y_1)^2 \\ y_1^{-1} \end{pmatrix},$$

$$y[3] = \begin{pmatrix} y_3(1+y_1^{-1})^{-2}(1+y_2^{-1}(1+y_1)^{-2})^{-2} \\ y_1^{-1}(1+y_2(1+y_1)^2)^2 \\ y_2^{-1}(1+y_1)^{-2} \end{pmatrix}.$$

$y_3 = 1/(y_1 y_2)$  のもとに条件  $y[3] = y[1]$  を整理すると  $1 + y_1 + y_1^2 = 0$  となるので

$$y_1 = e^{2\pi i/3} = y_2, \quad z[1] = -\frac{1}{y_1} = e^{\pi i/3} = z[2]$$

これより

$$\text{Vol}(M_\varphi) = 2D(e^{\pi i/3}) = 2.02988 \dots$$

(この結果自体はクラスターとは別に知られていました.)

**Q 12.**  $\varphi = RL^2$  の場合に次に答えよ.

- (1) 理想四面体 3 つの *moduli* を求めよ.
- (2) 双曲体積  $\text{Vol}(M_\varphi)$  を求めよ.

*Remark.* [HI1]

- (1) クラスター変数  $x$  を使うと Chern-Simons 不変量が計算できる. (4.3 節の最後に紹介した対応表で説明しなかった部分と関連する.)
- (2)  $[0, 1]$  上の  $\Sigma_{0,4}$  束に特別な境界条件を課したのから 2 橋結び目の理想四面体分割が構成できる [SW]. この分割は CA を用いて記述でき, 上の例と同様な方法によって結び目補空間の双曲体積と Chern-Simons 不変量が計算できる.

さらにクラスター代数の量子化を用いると, いろいろな不変量が構成できることがわかっています.

## 4.5 $R$ 作用素

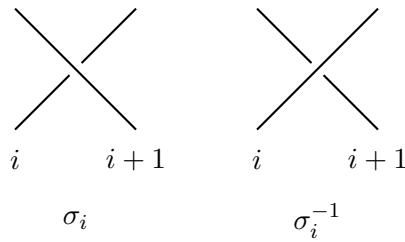
### • Braid 群と結び目の不変量

$n$  を 2 以上の整数として, 並んでいる  $n$  本の紐を考えます. 隣り合う 2 本の紐  $i, i+1$  を交差させる操作を  $\sigma_i$  とするとこれらは次の関係をみたしています:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (4.1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j| \geq 2) \quad (4.2)$$





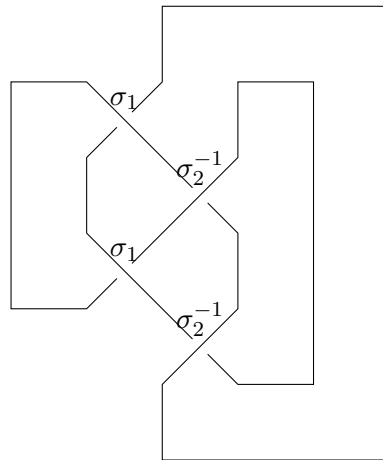
関係式 (4.1),(4.2) のもとにシンボル  $\sigma_i$  で生成される群

$$B_n = \langle \sigma_i (i = 1, \dots, n - 1) \rangle$$

を braid 群といいます.

*Remark.*  $B_n$  にさらに関係式  $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$  を課すと対称群が得られます. □

たとえば braid 群の元  $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$  の図において, 上下の紐の両端をつなぐことにより 8 の字結び目  $4_1$  が得られます.



$\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$  の closing

一般にも任意の結び目  $K$  は braid 群の適当な元

$$\sigma_{s_1}^{\epsilon_1} \sigma_{s_2}^{\epsilon_2} \cdots \sigma_{s_n}^{\epsilon_n} \quad (s_i \in \{1, \dots, n - 1\}, \epsilon_i = \pm 1)$$

を閉じることで得られます. ただし braid 群による表示の仕方は一意的ではありません. braid 群の関係式のうち (4.1) を Yang-Baxter 関係式と呼び, その解を  $R$  作用素,  $R$  行列, または単に  $R$  といいます.

$R$  作用素の適当な表現を用いて結び目  $K$  の不変量が構成されます. よく知られたものに Jones 多項式  $J_K(2; q) \in \mathbb{C}[q]$ , その一般化として色つき Jones 多項式  $J_K(N; q) \in \mathbb{C}[q]$  が

( $N$  は 2 以上の自然数) ありますが, これらは  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  の表現から作られた  $R$  を用いて定義されます. 一方 Kashaev は  $N^2 \times N^2$  行列で表される  $R$  行列,  $R^K$  を定義してそこから Kashaev 不変量  $\langle K \rangle_N$  を導入しました. この不変量の背景は謎めいていましたが, 実は色つき Jones 多項式  $J_K(N; q)$  を 1 の  $N$  乗根  $q = e^{2\pi i/N}$  に特殊化したものであることがわかっています [MM].

これらの不変量は完全に代数的に構成され, 一見双曲幾何とは無関係に思えます. Kashaev が 1997 年に予想した以下の関係式は皆を驚かせました [Ka].

$$\frac{2\pi}{N} \log |\langle K \rangle_N| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{Vol}(S^3 \setminus K)$$

これは「体積予想 (volume conjecture)」と呼ばれ, 2002 年に Chern-Simons 不変量を含む形の予想に一般化されました [MMOTY].

$$\langle K \rangle_N \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \exp \frac{N}{2\pi} \text{CV}(S^3 \setminus K).$$

ここで, 3次元多様体  $M$  の双曲体積  $\text{Vol}(M)$  と Chern-Simons 不変量  $\text{CS}(M)$  を組み合わせた量

$$\text{CV}(M) := \text{Vol}(M) + \sqrt{-1} \text{CS}(M)$$

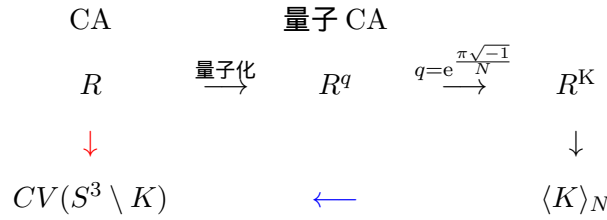
は複素体積 (complex volume) と呼ばれています. 体積予想は結び目に関する重要な予想の一つで, 今日盛んに研究されています.

- CA の  $R$  作用素

これまでの講義で説明してきたように, CA は代数であり, しかも双曲幾何とも深い関わりがあります. そこで, CA を使って幾何的に素性の良い  $R$  作用素を構成するという問題が考えられます. 実際にやってみると, 体積予想を CA という新しい切り口で見られることが分かりました [HI2, HI3]. 結果の概略は次のようになっています.

まず, CA の mutation を 4 つ組み合わせると先ほどの Yang-Baxter 関係式を満たす  $R$  が得られます. この章で説明してきたように mutation 1 つが理想四面体 1 つに対応していて, この  $R$  は四面体 4 つから成る理想八面体になります. 続いて前節のように自動的に体積を計算したいところですが, 分割が複雑なために計算上の困難があり, 現段階では予想に留まっています.

1 章で説明したとおり CA は可換環ですが, その非可換版として Fock と Goncharov により定義された「量子クラスター代数 (量子 CA)」というものがあります [FG].  $y$  変数がパラメータ  $q$  を用いて非可換化され,  $q = 1$  で可換な CA に戻ります. この量子化を使うと, CA で構成した  $R$  の量子化  $R^q$  が自然に定義でき, さらに  $q$  を 1 の  $2N$  乗根  $q = e^{\pi\sqrt{-1}/N}$  に取ると  $R^q$  を  $N^2 \times N^2$  行列で表すことができます. その行列が Kashaev の  $R$  行列  $R^K$  とほぼ同じ (対角行列によるゲージ変換で一致する) であることが証明されました. 以上をまとめてみましょう.

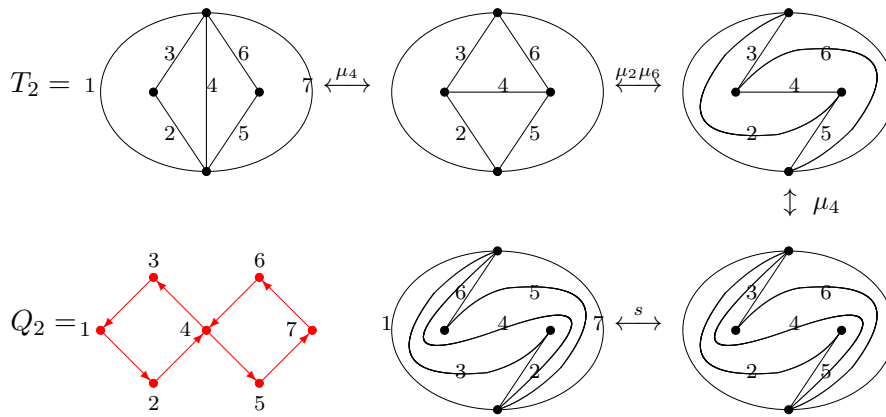


黒い矢印の部分は定理, 赤い矢印は [HI2] に書かれた予想, 青い矢印が (一般化された) 体積予想です. 体積予想が証明できた訳ではありませんが, 興味深い結果だと思います.

•  $R$  の構成

残りの時間で  $R$  の構成と赤い矢印の予想を説明します.

下の図のような, 境界に 2 点, 内部に 2 点を持つ円板の三角形分割  $T_2$  を考えます. 辺 4, 2, 6, 4 の順で flip し, 辺の番号付けが初めの三角系分割と同じになるように付け替えます (図ではこの操作を  $s$  と書いています). すると 2 つの内点が互いの周りを反時計周りに半周したように見える分割が得られます. このような操作を half Dehn twist といいます.



$Q_2$  を三角形分割  $T_2$  に対応する quiver とし,  $R$  をこの half Dehn twist を用いて

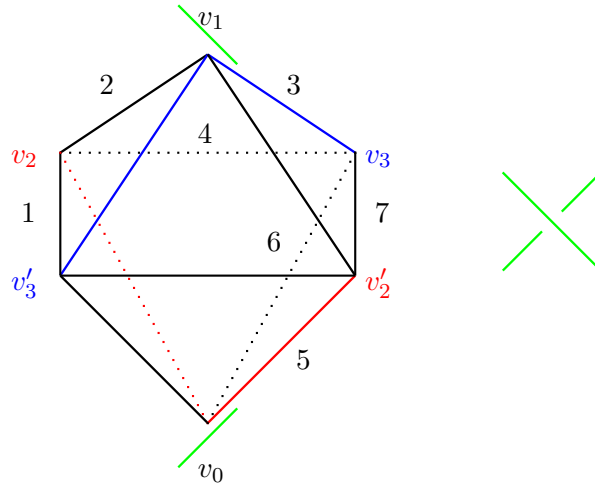
$$R = s_{3,5} \circ s_{2,5} \circ s_{3,6} \circ \mu_4 \circ \mu_6 \circ \mu_2 \circ \mu_4$$

と定義します.  $R$  の定義から  $Q_2$  は  $R$  で不変, つまり  $R(Q_2) = Q_2$  であることに注意してください. こうして braid 群  $B_2$  が構成されました.  $R$  の  $y$  変数  $y = (y_1, y_2, \dots, y_7)$  への作用

は次のようになります.

$$R(y) = \begin{pmatrix} \frac{y_1 (1 + y_2 + y_2 y_4)}{y_2 y_4 y_5 y_6} \\ \frac{1 + y_2 + y_6 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6}{1 + y_2 + y_6 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6} \\ \frac{y_2 y_4}{y_4} \\ \frac{(1 + y_2 + y_2 y_4) (1 + y_6 + y_4 y_6)}{1 + y_2 + y_6 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6} \\ \frac{y_4 y_6}{y_2 y_3 y_4 y_6} \\ \frac{1 + y_2 + y_6 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6}{(1 + y_6 + y_4 y_6) y_7} \end{pmatrix}^T.$$

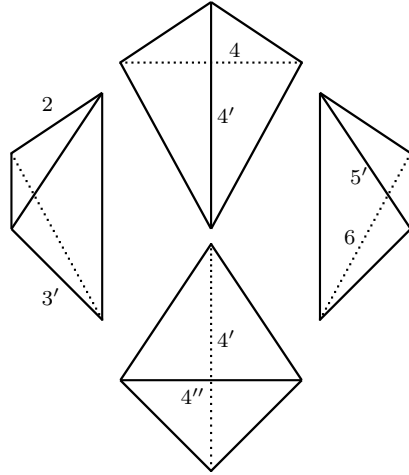
$R$  と理想八面体との関係を見てみましょう. まず, 最終的に得られる立体は, 図のような八面体で辺  $v_1 v_3$  と  $v_1 v'_3$ , 辺  $v_0 v_2$  と  $v_0 v'_2$  をそれぞれ同一視したものです. 図で同一視する辺どうしを同じ青色または赤色で表しています.



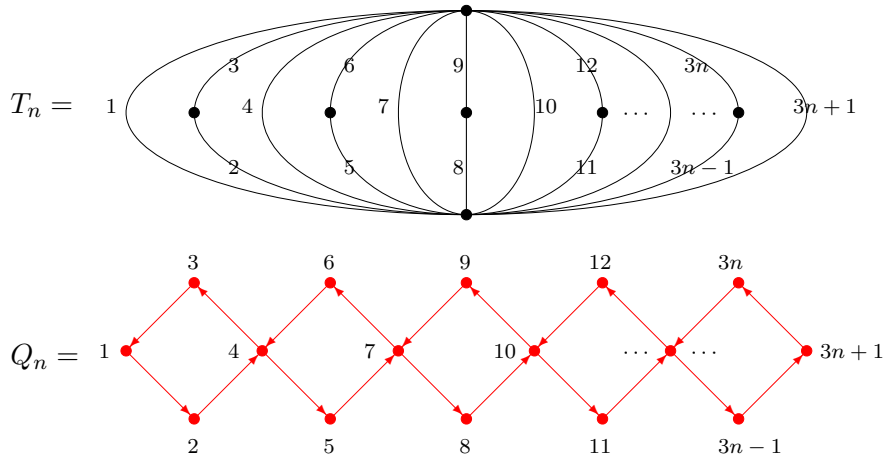
これが三角形分割  $T_2$  に 4 つの四面体を貼り合わせて得られることを確認します. 八面体の面を頂点を用いて  $\Delta v_1 v_2 v'_3$  などと表し,  $T_2$  で辺 1, 2, 3 で囲まれている三角形を  $(1, 2, 3)$  と書くことにします. 八面体の 8 つの面のうち奥の 2 つ, 左上の 1 つ, 右下の 1 つの計 4 つが初めの  $T_2$  に現れている三角形で, その対応は

$$\begin{aligned} \Delta v'_3 v_2 v_1 &\longleftrightarrow \Delta(1, 2, 3) \\ \Delta v_2 v_1 v_3 &\longleftrightarrow \Delta(2, 3, 4) \\ \Delta v_3 v_2 v_0 &\longleftrightarrow \Delta(4, 5, 6) \\ \Delta v'_2 v_0 v_3 &\longleftrightarrow \Delta(5, 6, 7) \end{aligned}$$

です. 頂点  $v_0$  と  $v_1$  が  $T_2$  の内点に対応し, 紐はこれらの頂点にあります. 図では紐を緑線で表して, 紐の交差を上から見ると右のようになります. 辺 4 の flip で  $T_2$  に四面体  $v_0v_1v_2v_3$  が貼り合わされ, さらに辺 2 の flip で四面体  $v_0v_1v_2v'_3$ , 辺 6 の flip で四面体  $v_0v_1v'_2v_3$ , 辺 4 の flip で四面体  $v_0v_1v'_2v'_3$  が貼り合わされます (下の図を参照). 最後に辺の番号付け替えをすると八面体の残りの 4 面が half Dehn twist 後の  $T_2$  に対応することが分かります.



一般の  $n > 2$  で braid 群  $B_n$  を得るには, 次のような, 境界に 2 点, 内部に  $n$  点を持つ円板の三角形分割  $T_n$  を考えます. 対応する quiver は  $Q_n$  です.



左から  $i$  番目と  $(i + 1)$  番目の内点を half Dehn twist する  $R_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) を, CA の言葉で

$$R_i = s_{3i,3i+2} \circ s_{3i-1,3i+2} \circ s_{3i,3i+3} \circ \mu_{3i+1} \circ \mu_{3i+3} \circ \mu_{3i-1} \circ \mu_{3i+1}$$

と定義します.  $n = 2$  のときと同様,  $Q_n$  はどの  $R_i$  でも不変です.  $R_i$  によって  $y$  が別の  $y'$  にうつるわけですが,  $y$  の変化を計算をすることによって次が確かめられます.

**Proposition 4.6.**  $R_i$  たちは *braid* 群  $B_n$  の関係式

$$\begin{aligned} R_i R_{i+1} R_i &= R_{i+1} R_i R_{i+1} \quad ; i = 1, \dots, n-1, \\ R_i R_j &= R_j R_i \quad ; |i-j| \geq 2 \end{aligned}$$

を満たす. □

任意の結び目は *braid* 群で表示して両端を閉じることで構成できました. これに対応して,  $(n+2)$  点付き円盤の三角形分割  $T_n$  に理想八面体を貼り合わせて一番最初と最後の円板を同一視すると「 $S_1$  上の点付き円盤束」が得られます. これが結び目補空間の四面体分割になることが期待されます.

**Conjecture 4.7.**  $\sigma_{s_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{s_m}^{\epsilon_m}$  を結び目  $K$  の *braid* 表示とし,  $y$  パターンを

$$y[1] \xrightarrow{R_{s_1}^{\epsilon_1}} y[2] \xrightarrow{R_{s_2}^{\epsilon_2}} \cdots \xrightarrow{R_{s_m}^{\epsilon_m}} y[m+1]$$

と定める. このとき  $y[1] = y[m+1]$  の解であって  $Vol(S^3 \setminus K)$  を与えるものが存在する.

ここで  $K$  は双曲結び目 ( $S^3 \setminus K$  が双曲構造を持つ) とは限っていないことに注意してください.  $K$  が双曲的でないときは双曲体積はゼロと定義しますが, その場合も含んだ予想です.

周期的条件  $y[1] = y[m+1]$  から  $S_1$  上の束を得るために  $y$  変数が満たすべき代数方程式が得られ, その解が四面体たちの moduli を定めます. 解の中に正しい双曲体積を与えるものがある, というのが予想の主張です. しかし, 方程式がかなり複雑な上, 方程式の数が  $y$  変数の数より少ないため実際の計算は非常に困難です. 現段階では, 8 の字結び目と幾つかのトラス結び目 (双曲的でない) について, 予想を支持する数値計算結果が得られています.

*Remark.*

- (1) この方法では  $S^3 \setminus (K \cup 2 \text{点})$  の四面体分割が得られているが, 条件をうまくとることによって, この2点を  $K$  に吸収させることができる [W]. さらに多くの四面体は裏返ったりつづれたりしている可能性があるが, 体積は正しい値が得られると考えられる.
- (2) 論文では, ( $y$  変数だけでなく) クラスター変数も用いて複素体積に関する予想を定式化している [HI2].

以上で講義を終わります. 3章と4章ではかなり専門的な内容も多かったと思います. 興味のある方は参考文献に挙げた論文をご覧ください.

長い時間聴いていただきどうもありがとうございました.

## 文献について

### [第2章]

CA に関する日本語の教科書はありません。英語では唯一次の本があります。

- R. J. Marsh, Lecture Note on Cluster Algebras [M]

この本は読みやすいですが、証明は必ずしも書いてありません。証明を知りたい人はやはり原論文

- S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras I – IV [FZI]–[FZIV]
- S. Fomin and A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon [FZ-L]

を読むのが最良です。非常に整理されて読みやすく書かれています。arXiv で手に入ります。ルート系については参考書

- 松澤淳一, 特異点とルート系 朝倉書店 すうがくの風景 2002

がおすすめです。

### [第3章]

日本語の文献として次を紹介しておきます。

- 中西 知樹, 2011 年 9 月 日本数学会秋季総合分科会無限可積分系セッションの予稿, (名古屋大 中西 知樹氏 HP <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/nakanisi/index.html>)
- 雑誌「数理科学」2015 年 3 月号「団代数をめぐって」

### [第4章]

双曲幾何になじみのない人のために、非常に基本的な文献を 2 つ紹介しておきます。

- (1) 深谷賢治, 双曲幾何 岩波書店 現代数学への入門 (2004)
- (2) 小島定吉, 3 次元の幾何学 朝倉書店 講座 数学の考え方 22 (2001)

(1) は 2 次元双曲幾何学についてはじめから書いてあります。(2) は 3 次元で, advanced なことまでわかりやすく書いてあります。

CA の双曲幾何への応用に関する日本語の文献は

- 長尾 健太郎, 2012 年東北大学集中講義ノート, 黒木 玄 記  
(東北大 黒木 玄氏の HP <http://www.math.tohoku.ac.jp/kuroki/index-j.html>)

がおすすめです。言葉だけ出した量子クラスター代数については読みやすい文献はありませんが、基本文献をあげておきます。

- V. Fock and A. Goncharov, Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm [FG]

## 参考文献

- [FG] V. Fock and A. Goncharov, Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **42** (2009) 865–930.
- [FM] A. Fordy and R. Marsh, Cluster mutation-periodic quivers and associated Laurent sequences, *J. Algebraic Combin.* **34** (2011) 19–66.
- [FST] S. Fomin, M. Shapiro and D. Thurston, Cluster algebras and triangulated surfaces I. Cluster complexes, *Acta Math.* **201** (1998) 83–146.
- [FZI] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. I. Foundations, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002) 497–529.
- [FZII] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. II. Finite type classification, *Invent. Math.* **154** (2003) 63–121.
- [FZIII] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells, *Duke Math. J.* **126** (2005) 1–52.
- [FZIV] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. IV. Coefficients, *Compos. Math.* **143** (2007) 112–164.
- [FZ-L] S. Fomin and A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon, *Adv. in Appl. Math.* **28** (2002) 119–144.
- [HI1] K. Hikami and R. Inoue, Cluster algebra and complex volume of once-punctured torus bundles and two-bridge knots, *J. Knot theory and Its Ramifications* **23** (2014) 1450006.
- [HI2] K. Hikami and R. Inoue, Braids, complex volume, and cluster algebra, *Algebraic and Geometric Topology* **15** (2015) 2175–2194.
- [HI3] K. Hikami and R. Inoue, Braiding operator via quantum cluster algebra, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 474006.
- [IIKKS] R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, Periodicities of  $T$  and  $Y$  systems, *Nagoya Math. J.* **197** (2010) 59–174.
- [IIKKN1] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi, Periodicities of  $T$  and  $Y$  systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type  $B_r$ , *Publ. RIMS* **49** (2013) 1–42.
- [IIKKN2] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi, Periodicities of  $T$  and  $Y$  systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types  $C_r$ ,  $F_4$ , and  $G_2$  *Publ. RIMS* **49** (2013) 43–85.



- [Ka] R. Kashaev, The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm, *Lett. Math. Phys.* **39** (1997) 269–275.
- [Ke] B. Keller, Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories, in *Triangulated categories*, 76–160, London Mathematical Society, Lecture Note Series **375** (Cambridge University Press, 2010).
- [KNS] A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, Functional relations in solvable lattice models. I. Functional relations and representation theory, *Internat. J. Modern Phys. A* **9** (1994) 5215–5266.
- [LP] T. Lam and P. Pylyavskyy Laurent phenomenon algebras, arXiv:1206.2611.
- [M] R. Marsh, *Lecture Notes on Cluster Algebras* (European Math. Soc., 2013).
- [MM] H. Murakami and J. Murakami, The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot, *Acta Math.* **186** (2001) 85–104.
- [MMOTY] H. Murakami, J. Murakami, M. Okamoto, T. Takata and Y. Yokota, *Experiment. Math.* **11** (2002), no. 3, 427–435.
- [N] T. Nakanishi, Tropicalization method in cluster algebras, in *Tropical geometry and integrable systems*, *Contemp. Math.*, **580** (2012) 95–115.
- [NTY] K. Nagao, Y. Terashima and M. Yamazaki, Hyperbolic geometry and cluster algebra, arXiv:1112.3106.
- [Pe] R. Penner, The decorated Teichmüller space of punctured surfaces, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987) 299–339.
- [P] P.-G. Plamondon, Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces, *Compos. Math.* **147** (2011) 1921–1954.
- [SW] M. Sakuma and J. Weeks, Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements, *Japan J. Math.* **21** (1995) 393–439.
- [W] J. Weeks, Computation of hyperbolic structures in knot theory, in *Handbook of Knot Theory*, 461–480 (Elsevier, Amsterdam, 2005).

## 後記

本冊子は、2015年度に立教大学で4年生・大学院生を対象としておこなわれた井上玲氏の講義の記録です。講義は毎回90分2コマで、全部で7回行われました。後半は高度な話題にも触れられたのですが、講義期間中はいつも20名を超える出席者があり、このテーマに対する関心の高さがうかがわれました。

筆記者の能力不足により、4.4節と4.5節は改めて井上氏に執筆をお願いしました。また立教大学の小森靖氏には、本文中の図の作成について何度も相談にのっていただき、大変お世話になりました。42-43ページの図は小森氏に作成していただいたものです。特記してお二人に感謝いたします。

神保 道夫

## 訂正

文献 [FZIII]

誤 S. Fomin and A. Zelevinsky

正 A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky