

「関数の考え」とは何か

—小学校算数における「関数の考え」育成の意味とその改善点—

What is a "function idea" ?

Historical meaning of "function idea" training and its improvement points

黒澤 俊二*

KUROSAWA, Shunji

【要旨】 中島健三は「関数の考え」を「人間の本質的な働き」(中島 1981 a) と価値づけ、国も「関数の考え」の育成を算数教育の重点目標とした。「関数の考え」を「一つの数量を調べようとするとき、それと関係のある数量を見だし、それらの数量との間に成り立つ関係を把握し、例えば、問題解決の場面でその関係を利用しようとする考え」(中島 1981 b) と定義し、算数授業の改善を求めてきている。今般「新たな価値を生み出し」「獲得する知識の意味」(文部科学省 2018) に大きな変化を予見し知識創造を求める「知識基盤社会」を標榜した新指導要領では、「関数の考え」の目的「真理創造」「知識開発」に鑑み、更により強くより切実に小学校算数における「関数の考え」の育成を求めている。

しかし、現在までの教科書や実際の授業実践には、「関数の考え」を重点目標とした「関数の考え」育成の教材や事例は少ない。またここ数年の「全国学力・学習状況調査」における「関数の考え」に関連した調査問題の正答率は 50% に満たない。それ故、「関数の考え」の育成は授業実践されていないといわざるを得ない。

その理由として以下の二点がある。一つは「関数の考え」の理解不足、或いは未だに覚めやらない「現代化失敗」の余波による「関数の考え」育成に対する低意識である。もう一つはいわゆる「関数の考えの第一歩」での教材等の未開発である。

そこで、数学教育小史を振り返り、「関数の考え」の意味と意義を文献資料から再確認し、「関数の考え」を育てる授業改善点を探った。その結果「関数の考え」は、20 世紀初頭の数学教育改良運動にルーツがあり、「科学的精神」としての「関数観念」に基づく予見的態度であることがわかった。また、授業改善の視点として、「関数の考えの第一歩」で「わかりたい数量」が子どもの「問い」として設定されることが要点であることを再認識した。子どもが「従属変数」を「問い」「独立変数」を見つけていく教材の開発と提示の在り方に今後の研究課題がある。

キーワード: 関数の考え、数学教育改良・改造運動・関数観念、科学的精神

* 立教大学文学部教育学科

1. 「関数の考え」とは何か

(1) 「関数」と「関数の考え」

私たち人間は地球の表面上に生きている。その地球は回転して動いている。その回転する動きを私たちは、12 や 60 の数を単位にして数値化し、時間という数量に仕立て、変化として自覚している。その地球の動きという変化に関係して私たちも伴に動き変化をしている。私たちだけではなく地球上のすべての「ことがら」も地球の動きと伴に変化している。逆に考えれば、地球上のすべての「ことがら」は、地球の変化と関係し、何らかの独立変数的な「ことがら」によって従属変数的に変化させられている。私たちは変化と変化の関係のなかで生活している。

しかし、例えば国際宇宙ステーションからの映像を目の当たりにし、いわゆるカントのいう「コペルニクス的転回」を現実の「ものごと」としても、私たちは変化と変化の関係に生きていると気付くことに鈍い。自分自身の「ことがら」をはじめ多くの「ことがら」を固定的にとらえ、メタ的に変化とその関係を客観視できないときがある。動いている「ことがら」にはまだ変化を見いだしやすいものの、実は動いて変化しているにもかかわらず、一見すると動いていない、つまり変化がないかのように見える「ことがら」にまで変化を見いだすのは容易ではない。

これを正してくれるのが「関数」だ。「関数」そのものと「関数」を活用した「見方・考え方」という知識と態度が、地球上の幾つかの興味ある「ことがら」の変化に気付かせ、その変化を「変数」として見せてくれる。そしてそれらのいくつかの「変数」と「変数」の「関係」を「変わり方調べ」でとらえると、我々は地球上の「ことがら」に一定の解釈を創造的に得ることができる。

例えば、そもそも「速い」とはどういう「ことがら」だろうか。あの童話のウサギとカメとの競争では、結局どちらが「速い」という「ことがら」だったのだろうか。「くらべっこ」という興味が湧いてくる。そしてそもそも「速い」とか「遅い」とかは何かと関心を持ち、意欲的に問う。興味がわき関心を持ったそのとき、「速さ」と「遅さ」は対極するひとつの変化する「ことがら」であると気付く。その変化を数量化すると「変数」になる。それならばこの「速さ」「遅さ」という「変数」は何に依って決まるのか、身近なよく知っている他のものとの関係を考えるのである。「速さ」という今わからない「ことがら」を、今わかっているもうひとつの「ことがら」の「変数」に関係づけると、わからなかった「ことがら」への一つの解釈が見えてくる。

この「速さ」という例でいうならば、「速さ」とは「時間」と「距離」に関係づけることによって決まる「ことがら」であると。つまり、一定の「距離」を短い「時間」で移動した方が「速い」という「ことがら」であり、それに対してその同じ一定の「距離」を長い「時間」かかって移動した方が「遅い」という「ことがら」なのである、と解釈し「速さ」「遅さ」をわかったことにする。これは、「速さ」という「変数」を、「距離」を一定にしたときに、「時間」という「変数」に関係づけて、「速さ」は「時間」の「関数」である、と考えた結果である。

さらに「速さ」「遅さ」という「ことがら」の変化を決めるものは「時間」と「距離」だけだろうか、とさらに発展的に考えていく、といった具合だ。この一連の「そもそも」から始まる考えるプロセスは、ある興味を持った未知の「ことがら」を、変化する数量としてみて、その未知な「ことがら」を既知な「ことがら」に関係づけ、その関係に「理」というきまりを見いだしていく「みちのり」である。「ことがら」を「関係」として把握し、「関数」を活用して「理」を導き出す「みちのり」は、ひとつの知識を開発し創造していく「道」の「理」である。

このように「関数」を活用して考えることで、興味が湧き関心を持ったひとつの「ことがら」を「そもそも」何かと「問い」、曲がりになりにも創造的にその一面が見えて「わかった」とき、「ことがらの」一つの面が割れて明白になり、文字通り「面白い」のだ。そしてその結果、わからなかったもやもやした心が、ひとつわかってきたことで自然に晴れ晴れしくなり、よりよい方向へ移っていく。この心のよりよい方向へと移りゆく様子が「楽しい」という情緒なのだ。

この「面白い」「楽しい」ことへと誘ってくれる「関数」とその「見方・考え方」などを学ぶはずである数学的な内容とその算数学習に対して、子どもが「算数・数学なんか何の役に立つのだ。」「算数・数学の授業はたのしくない」などと算数・数学およびその学習を否定的に捉えてしまう傾向を、最近の調査（例えばTIMSS2011 質問紙調査結果 2011）は示している。この算数・数学学習での「学び」に対して否定的に嫌悪する我が国の子どもたちの傾向は、日本の算数・数学教育の貧弱さを物語っている。またその傾向は、算数授業が、数学とその教育の本質から離れ、役立たない有用性の低い、それ故に楽しくない「学び」を提供している証拠でもある。

今までも算数・数学教育の本質から離れた実践現状を嘆き何とか改善する動きは多くあった。しかしながら、前述のような調査からもわかるようになかなか授業改善が進んでいない。とくに、数学の根幹をなす「関数」とその「見方・考え方」育てる授業改善が一般化されてはいない。なぜだろうか。あらためて「関数」とその「見方・考え方」育てる授業改善が一般化されない原因を問題とし、その問題を解決し、「関数」を知りその「見方・考え方」を育てる算数授業改善を緊急に改善し、しかも実効性のあるものとしなければならない。なぜならば、21世紀に迎えた「知識基盤社会」では「新たな価値を生み出していく」ことが求められ、そのためには「わからないこと」を「関係付けて」「わかっていく」という「関数」とその「見方・考え方」が、創造活動として非常に有用であるからだ。算数・数学で学ぶ「関数」とその「見方・考え方」は、「真理を創造し」「知識を開発」する強力なツールである。

そこで、数学とその教育の本質に迫るよりよい算数授業の改善を求める前提として、知識の開発や創造に役立つ有意義な「関数」、それ故に「面白い」「楽しい」学びを誘発する「関数」と伴にある「見方・考え方」とは何かあらためて確認する。そして、現在までのすべての小学校学習指導要領で、義務教育として法的にも責任を持って子どもを育てることになっている「関数の考え」とは何か。「関数」と「関数の考え」を検めてとらえ、その意味と意義を明白にする。

「関数の考え」とは「関数」の「考え」であるから、はじめに「関数」の意味を復習的にとらえてみる。「関数」と伴にある「関数の考え方」をとらえるために。

「関数」とは何か。一般的には「二つの変数 x 、 y があって、 x の値を定めるとそれに対応して y の値がただ1つ定まるとき、 y は x の関数という。」(例えば高等学校数学科用教科書「数学Ⅰ」数研出版)という。あるいは、「 X と Y を空でない集合のとき、任意の $x \in X$ に対してただひとつの $y \in Y$ が対応しているとき、関数 $f: X \rightarrow Y$ が定まったといい、 $y=f(x)$ と記す。」(岡本・長岡 2014)という。またすべての国民が初めて「関数」という言葉を数学で学習することになっていて、そのとき使用する、中学校1年生の教科書(学校図書版「数学」中学校1年生教科書 2006)には、「ともなう変わる二つの変数 x 、 y があって、 x の値を決めると、それに対応する y の値がただ1つ決まるとき、 y は x の関数であるという。」とある。

これらの「関数」の説明には、若干の違いがあるものの、おおかた上記のような「ただひとつ」「定まる」「対応する」「決まる」「とき関数という」といった表現形式となっている。人間の行為「～

のとき」というプロセスを表現して定義している。すなわち、「関数」とは定義的にはいわゆる「一意対応」というひとつのプロセスであることがわかる。一般的に見かける定義の表現形式である「 A は B である。」といった命題的な宣言的知識としての表現形式を用いて「関数」を説明することは、中学校や高等学校の教科書ではあまりない。若干の違いはあるもののその定義に共通して言えることは「関数」とは「一意対応」という操作のプロセスとしての概念である。

しかしながら、岡本久・長岡亮介が指摘するように「このような定義が一般化したのは、19世紀の後半からであり、それ以前には関数はこのような概念ではまったくなかった。」(岡本・長岡 2014) という。そして「長い歴史を通じて発展してきた関数には様々な“顔”がある」という。確かに、19世紀以前には、例えばレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler 1707~1783) の「関数に関する一般的な事柄」で説明されていることであるならば、「ある変化量の関数というのは、その変化量といくつかの数、すなわち定数を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表示式のことをいう」(高瀬 2009) という。前述のような現在の中学校や高等学校の教科書とは異なる「関数」の説明である。プロセスではない宣言的な知識としての命題的な説明である。

その説明があるように、「関数」には幾つかの「顔」がある。この他にも理解にかなりの前提的な知識が必要な「関数」の説明が確かに幾つもある。連続的な変化としてグラフで表せるものから、不連続なものや、さらには曲線で表せないようなものにまでも「関数」として見るようになってきた。例えば、「至る所不連続になるが積分可能な関数」などと言われると、筆者にとっては急に頭をたたかれたように慌ててしまい「積分可能な関数」を理解する自信が失せてくる。(これは、ひとつの「リーマン」ショック $R(x)$ である。)

幾つかどころか「関数」には多くの「顔」がある。「誰も関数とは何であるかを説明することはできない。」というヘルマン・ワイル (H. Weyl 1949) の一文や、「本当をいうと、関数の観念は定義可能なものではなく、定義のつもりでいるものも実際は同語反復に過ぎない。」というサロモン・ボホナー (S. Bochner 1965) のよく引用される有名な指摘がある。これらの指摘は、「関数」の意味の発展性と意味深さを象徴している。フラクタル的にいうならば、それこそ、「関数」の意味そのものは、時代に伴って創造的に発展し変化してきているひとつの「変数」として考えることができる。

「関数」と同じような意味で使われる言葉に「写像」という用語がある。「写像」は「関数」の意味と似て非なる重要な概念である。それ故に「写像」は、「関数」の意味理解には欠かせない概念である。未だ帰納的思考が主流である小学生の子どもに「関数論」をもちだし「写像」までも学習内容とするのはさすがに無理な話である。しかしながら、「写像」という用語を持ち出すことは無理としても、操作的理解として「写像」に相当する操作を体験させたいところである。今現在の義務教育学校では「写像」という用語を算数・数学の授業で全く扱わない。高等学校ではどうだろうか。「理数科重視」を標榜し「科学技術立」を目指す国として、少なくとも高等学校では「関数」とともに「写像」の概念を学ぶべきである。

昭和 45 年 (1970 年) の高等学校学習指導要領「数学」の下では、高等学校数学で「写像」が扱われていた。昭和 45 年高等学校学習指導要領「数学」数学 I の目標に「(3) 写像の概念を理解させ、また、基本的な関数の特徴を理解させる。」とあり、内容として「写像の意味およびその合成と逆写像について理解させ、また、関数を写像としてとらえることができるようにする。」とある。私はその時代に高等学校の生徒として数学の授業で「写像」を学び、「集合 X から集合

Y への一意対応による写像を関数と呼ぶ。」と教えられた。また、「写像を変換あるいは関数ということもある。」「変換はやや幾何学的な場合に多く使われる、関数という語は解析的な場合におおくつかわれるようだ。」(矢野 1968) と学習したのだ。しかし、残念ながら今現在の高等学校では、一般的に「写像」を学ぶ対象にしていない。

「関数は、要素間の対応や写像を表すものであるが、その対応関係が必ずしも数式で表せる必要はない、という集合論による関数の定義は非常に含蓄のある定義である。」(権平・神原 1982) ということになると、「関数」の一般化が「写像」そのものであるととらえることができる。今現在は、「関数」と「写像」がまったく同じものになりつつある。「写像」と「関数」の区別について、中島匠一に言わせれば、「数式と関数の区別」そして「写像の定義域とレンジ」(中島 2012) という「数学の基本を学ぶ」ことだという。確かにそのとおりである。やはり「関数」に対するさらにより深い理解に至るには「写像」の概念が有効なのである。

しかしながら、ここでは「写像」と関連づけた「関数」そのものよりも、教育で扱う「関数の考え」の概念を明確にすることが目的であるから、「関数」についてことはしておくことにする。とりあえずは「変数に依存して決まるもう一つの変数を、元の変数の関数と呼ぶ」程度の現代的な理解で充分である。つまり、地球上の「ことがら」は動いて変化しているのだから、その変化する「ことがら」の条件と範囲を定め数値化し数に置き換えれば、ひとつの「ことがら」はひとつの「集合」とみることができる。その「集合」の要素は内包される数となりその数は変化することから「変数」となる。そして、幾つもの変化する「集合」と変化する「集合」が写像として対応し、つまり「変数」と「変数」が関係し合って「関数」という関係になっている、といった程度の理解で充分である。

なぜならば、小学校算数では、「写像」という操作的な「関数」そのものが重点的に「学ぶ」対象ではないからである。もちろん、「比例」など初歩的であり基本的でかつ代表的な一部の「関数」および「関数的」なことを小学校高学年で扱う。しかしながら、主に「関数」そのものを扱うのは中学校から先の「数学」である。小学校では、「関数」そのものを学ぶことよりも、「関数の考え」を育てることに指導の重点があるからである。

(2) 「関数の考え」登場

それでは、「関数の考え」とは何か。まずは、そもそも「関数の考え」という算数教育用語はいつ、どこから用いられるようになってきたのか。その出所を探ることから始める。この用語は、誰によってどのような経緯で策定されたのであろうか。

太平洋戦争後、「関数の考え」という文言を小学校での算数教育の用語として提唱し、算数数学の教育実践に「関数の考え」の育成を求めたのは中島健三(1921 年大正 10 年～1994 年平成 6 年)である。そこで、太平洋戦争後現代に至るまでの中島健三の業績を中心に「関数の考え」という用語の登場と用語として確定されていく経緯を振り返る。そしてその後その経緯をたどるなかで、算数教育用語としての「関数の考え」の意味を明確にしていく。

太平洋戦争直後、昭和 22 年 1947 年、学校教育法・第二章・小学校・第十八条の第五項(算数に関して)に「日常生活に必要な数量的な関係を、正しく理解し、処理する能力を養う。」という算数科の目標が制定された。この学校教育法で既に「数量的な関係を」といわれる「関数」に着目していることがわかる。「小学校における教育については前条の目的を実現するために、左

の各号に掲げる目標の達成に努めなければならない。」という法規によって、算数科で扱う目標の総括的内容を「数量的な関係を」としているのだ。これは一つの驚きである。算数科にはいくつか大きな目標があるにもかかわらず、総括目標に単に「数量的な関係」とだけあるのだから。算数教育において「関数」を指導し「関数の考え」を育成することが第一の目標であることを太平洋戦争直後に国はもう既に表明していた。

どうして太平洋戦争直後の国を立て直す慌ただしい時期に、学校教育法で算数では「数量的な関係」を理解し扱うと第一に標榜したのであろうか。誠に興味津々である。敗戦後の混乱期に早々と「関数」および「関数の考え」の育成をなぜ目論んだのだろうか。

早々と「数量的な関係」を指導内容の第一義とした理由には、前述の中島健三の地道な動きがある。昭和 21 年 1946 年 5 月に文部省教科書局第二編集課に入省した中島健三は、その年に文部省から出された「新教育指針」を踏まえて、算数の教科書を「新編集しようというのは最初の仕事であった。」(中島 1997 a) と振り返っている。中島健三は、この「新教育指針」に則り新しい算数教育を模索し、新しい算数教科書の編纂を手がけることになったのである。

「新教育指針」とは、前述の昭和 22 年の「学校教育法」が出される一年前、まさに終戦直後に出された文部省からの文書である。この「新教育指針」には、「日本国民は合理的精神に乏しく科学的水準が低い」などの小見出し項目があり、戦争に対する反省から科学的水準を高めることの必要性を訴えている。具体的にはこの「新教育指針」のなかに、「科学的水準を高めるためにはどうしたよいか」という節があり、そこには「日常生活に科学的精神をはたかせること」と、そのために「自由の精神を奮い起こすこと」(文部省 1946 a) が強制的に記述されている。「物事を原因と結果、理由と結論という関係において理解し、しかも常に一般的原理にもとづいて個々の物事を判断し処理するのは合理的精神のあらわれであって、これが科学的精神のたいせつな一面である。」(文部省 1946 b) と「合理的精神」と「科学的精神」を強く標榜している。

この「合理精神」と「科学的精神」という用語は太平洋戦争前からあった。小倉金之助(1885 年明治 18 年～1962 年昭和 37 年)が、算数数学教育で育てる「科学的精神」とは「関数観念」であると強く主張した理論があった。太平洋戦争直後の文部省は、「新教育指針」の作成にこの小倉金之助の「科学的精神」を引用したことになる。太平洋戦争前の算数教育の改善を強く進めてきた小倉金之助の主張した「科学的精神」とその具現化である「関数観念」の復活を中島健三は目論んでいたことになる。戦後の新しい算数教育において果たせなかった小倉金之助の算数教育改善の意思を中島健三は受け継ぎ、それ故に「関数」を指導し「関数の考え」を育成することを算数科の第一目標とした、と解釈することができる。

しかし、その目論見はそう簡単には受け入れられなかった。中島健三が文部省に入省した当時、占領下にあった我が国は、連合国軍の民間情報教育局 C I E (Civil Information and Education Section) によって教育改革が強行されていた。義務教育延長として六三三制による新制中学の設置、国定教科書制度を改め学習指導要領発行という大きな改革のなかで、「新教育指針」と上記の昭和 22 年の学校教育法が制定された。その際に C I E からの圧力が大きかったという。「考えられもしなかった指示が C I E から出された、我が国の算数数学の程度が高いから引き下げろというわけである。」(中島 1997 b) と中島健三は後に語っている。

この「新教育指針」と「学校教育法」を受けて、昭和 22 年に初めて学習指導要領(試案)が作成される。その算数数学編(試案)では、算数科の目的の一つに「函数関係を、言葉や式で簡

潔に表したり、また、言葉や式で表された関数関係を理解すること。」と数量関係についての教育目標を掲げたのである。このことは、前述のように太平洋戦争以前の算数教育のなかに既に主張されていた「関数観念」の育成を受け継ぐことを表明したということになる。

しかしC I Eからクレームが付けられるのである。「算数・数学についてだけ、どうして」(中島 1997 c) クレームを付けるのかと中島健三は語っている。当時のC I Eについて「C I E内部にもいろいろと事情があった」(中島 1997 c) が、かなりの抵抗であったという。当時の新聞にも「仲間割れたC I E」とか「強制された総落第」「世界の水準より二年も低い算数学力」(読売新聞「日本の新学期」)と算数教育の「引き下げ」に対するC I Eへの批判が報道されている。実際、筆者は「戦前からの関数や関数観念を盛り込んだ試案にC I Eにクレームが付けられた。」ことについて中島健三先生からその当時の様子を直接伺っている。「たまたま(昭和)25年の6月に朝鮮で南北戦争が起こり、この編集あたりからC I Eの態度も、かなりやわらかになった」(1997 d) とC I Eとの交渉に苦労したという。

そして、戦争直後の社会が大分落ち着いてきた10年後、中島健三は、昭和33年1958年改訂の学習指導要領算数で、「数量関係領域」という関数関係を扱う領域を新設し、「関数」や「関数の考え」の育成を強く打ち出していく。昭和30年代(1955年～1964年)においては「関数」とか「関数観念」といった用語は、算数教育の関連書籍には出てきているが、学習指導要領など公的な刊行物には「関数の考え」という用語は未だ出てきていない。

そしてさらに昭和33年から10年後の昭和43年1968年の改訂学習指導要領で、中島健三は、数量関係領域の下位項目に小学校では初めてストレートに堂々と「関数」という項目を新設した。小学校での「関数」の登場である。

小学校で「関数」が記述された昭和43年1968年の学習指導要領は、アメリカ発のいわゆる狭義の意味での「数学教育現代化」の影響を受けた指導要領である。「時代の進展に対応した教育内容の導入」「教育内容の現代化」と称して、とくに算数では「集合の導入」とクローズアップされた。「集合」とともに「関数」も導入された。「数学教育の進歩に応じ、集合、関数、確率などの小学校としては新しい概念を導入し、算数教育の現代化にふさわしい改善を行う」と国は算数教育実践へ「大きな課題」を突きつけた。太平洋戦争直後から「関数の考え」の育成を継続させていこうとしてきた方針は、アメリカからの「数学教育現代化」運動によって一気に加速されたのである。

しかしその後、10年と経たないうちに、マスコミなどの「新幹線教育」、「おちこぼれ」から「おちこぼし」へ、「計算力低下」といった報道とその世論により、残念ながら「現代化」の波は去っていった。「集合論を小学生に教えようというのはとんでもない間違いである。」「数学教育の現代化の失敗」(「WHY JOHNNY CAN'T ADD: The Failure of the New Math」Morris Klin M. クライン 1976)といった思潮から、主に「集合論」に対する批判だったのであるが、「関数論」までも含め広く現代数学の内容を教育することへの批判が高まった。そして、10年後の昭和52年の学習指導要領では、「集合」だけではなく「関数」という用語は消された。今現在も小学校では「関数」という文言は用いられていない。

しかしながら、「数学教育の現代化の失敗」に際しても、「関数の考え」という、目標項目はなくならなかった。「ここで警戒すべきことは、関数の意義が完全に消滅してしまった、という極端な断定に陥ることである。20世紀の後半の現在でも、関数概念のもつ重要性は決して消滅し

てはいない。」「国民教育のなかで関数概念を養っていくことの必要性は、増大しても減少することはあり得ない。」(遠山 1980) という意見が象徴するように、昭和 52 年 1977 年の学習指導要領においても「関数の考え」の育成は重点目標として残り継続されていく。もちろん、「現代化の失敗」報道による世論の圧力は、「関数」とその「関数の考え」の教育に対しても大きかった。その後現在に至るまで、重点目標として掲げながらも未だに「関数の考え」の育成を高らかに主張することが憚られている様な状況である。「理数科重視」と「科学技術立国」をスローガンにしているのにもかかわらずである。

このように中島健三は、太平洋戦争直後から徐々に戦前からあった「関数観念」にもとづく「関数の考え」の育成を中心とした算数学習指導を復活させようとしてきた。事実、前述のように、小学校算数教育で「数量関係」や「関数」といった指導内容の項目を新設提案し、「現代化」の荒波に乗じて広く波及させ、そしてその波が去っていったから「関数の考え」の育成を強調し続けていった。

ただ、初めての昭和 22 年の学習指導要領にも、1958 年昭和 33 年の学習指導要領と 1968 年昭和 43 年の学習指導要領算数にも「関数の考え」という用語は登場しない。「関数の考え」に相当するであろう「数量の関係」とか「変数の関係」や「関数的な見方」といった幾つかの一見異なるような表現が遣われている。小倉金之助の「関数観念」を太平洋戦争後の新しい算数教育に何という用語を用いてアピールするか模索しているかのようである。

そして昭和 43 年学習指導要領公示後の翌年の 1969 年昭和 44 年 5 月に、昭和 43 年の改訂指導要領を受けて「小学校指導書算数編」が発刊された。そこでは、「数量関係」についての記述のなかに「この領域は、関数についての基本的な知識を指導するのが主たるねらいではなく、関数的な考え方を伸ばすことに主要なねらいがある。」(文部省 1969) と記されている。「関数的な考え方」という文言の登場である。そして、「関数」そのものではなく、「関数」を活用して「関係付けて」考え、「ある数量は他のどんな数量を決めれば決まるのか」「一方の数量をもとにして他方の数量が決められないか」と考えるプロセスにある「関数的な考え方」を伸ばすことを算数指導に重点目標として定め、その実践を求めている。

ところが、細かいことになるのだが、この 1969 年昭和 44 年の「小学校指導書算数編」の冊子の文章では、「関数の考え」という語はほとんど用いられておらず(筆者は 2 カ所見いだすことができた)である。) 上記のような「関数的な考え方」と書かれているところが多いのである。「関数の考え」ではなく「関数的な考え方」と「的」と「方」がついているのだ。この指導書では「関数の考え」と「関数的な考え方」が混在している。その他、「関数的な見方、考え方」や「関数的な見方」といった語もみることができる。つまりこの「小学校指導書算数編」では、まだ「関数の考え」が用語として確定していないことを露呈している。

同じように残念ながら、日本数学教育学会から出版されている 2006 年発行の「算数指導用語事典第 3 版」でも、つまり平成時代になっても「関数の考え」の説明文に「関数的な考え」とあるのだ。この場合は「的」がついている。些細なことで小さなことであるが大きな問題点である。なぜならば、算数教育の内容として「関数の考え」は重要項目であり、それ故、本来きちんと規定し定義されるべき用語であるからだ。用語の正確性と整合性に欠けている部分が未だにあるのは非常に残念である。似ている表現、「関数的な考え方」と「関数の考え」をはじめ、「的」をつけたりとったり、「方」をつけたりとったりしている幾つかの用語を、中島健三をはじめとして

数学教育研究者たちはきちんと判別し区別して用いていたのであろうか。

もしもきちんと「関数的な考え方」と「関数の考え」を判別し区別して用いていたとしたら、この昭和44年の「小学校指導書算数編」では、中島健三は「関数の考え」と「関数的な考え方」のどちらを主張したかったのであろうか。つまり、「関数」の概念としての内在する内容そのものに重点を置いた「関数の」内容としての「考え」なのか、それとも「関数」に内在する「考え」のように「考える」仕方に重点を置いた思考方法としての「関数的な」「考え方」なのか、迷っているかのようなのである。例えば、「おばあちゃんの話し」と「おばあちゃんの話し方」とは、内容と方法という点では明白に異なる。これと同じように「考え」と「考え方」とでは意味が変わってくるはずである。

ただ、「関数」という概念そのものには、前述のような「写像」として「対応させる」といった方法をも含むプロセスが内容であるから、「関数的」と「的」を付けるかどうかのこともあるが、「関数」という「考え方」というとらえ方もできる。それ故に、「考え」なのか「考え方」なのかは、判断し難いところもある。いずれにしろ、「関数の考え」と「関数的な考え方」が併記されていることから、この時点では未だ「関数の考え」という用語が定まっていなかったことを示している。

ところが、いよいよその後「関数の考え」の統一的な表現の登場である。「小学校指導書解説編」発刊から4年後の昭和48年1973年9月に、当時の文部省から「小学校算数科指導資料・関数の考えの指導」が政府刊行物として出版された。ここでは「関数的な考え方」という「的」や「方」が付加されている文言はほとんどなく、はっきりと「関数の考え」と記されている。頻繁に「関数の考え」と記されている。しかも、文部省からの刊行物の題名としての「関数の考え」の登場である。

この「小学校算数科指導資料・関数の考えの指導」は146ページのA5版の小冊子である。そこには、「算数科における関数の考え」として「関数の考えの教育的意義」に始まり、「低学年における関数の考え」や「図形指導における関数の考え」までも含め、「関数の考え」の指導内容と方法、そしてその具体的な指導事例を豊富に丁寧に載せている。もちろん、「関数の考え」の意味する定義的な規定についても触れている。さらに、「教師自身が関数関係についてよく理解していることが必要であることはいうまでもない。」として、数学としての「関数」に関する理論も掲載している。「関係」「対応」「写像」についてもきちんと解説している。それ故、この「指導資料」は、文字通り「関数の考え」を育成する授業づくりに重要な資料であり、小学校教師たちにとってはバイブル的な存在であった。小学校の算数授業研究会や校内研究会でテキストとして多いに活用されていた。

(3) 「関数の考え」の意味

さて、いよいよ「関数の考え」の意味を明確にして確認していく。ここまで、「関数の考え」という用語の意味を、「関数」という概念と伴にある「考え」という程度で、その中身を明確にしないまま、この「小学校算数科指導資料・関数の考えの指導」での「関数の考え」の登場まで記してきた。ここで「関数の考え」の意味をできるだけ具体的に整理して確認していく。

前述のように「指導資料・関数の考えの指導」では、「関数の考え」という用語が確定的に登場した。「的」と「方」は省かれた用語として統一的に「関数の考え」が遣われたのだ。しかも

書名として題名に採用したのであるから、あたかも昭和43年の学習指導要領と昭和44年の「小学校指導書算数編」にあった「関数的な考え方」といった曖昧な表現と一線を画し、それらを修正するかのような意気込みである。これは小学校算数で重要なのは「関数の考え」の育成であるという決意表明でもある。この指導資料は文部省から出版された公刊物である。それ故、「関数の考え」とその育成の重点化は、もはや中島健三個人一人の主張による主題ではない。いわば「関数の考え」についての文部省の公式見解である。

この公刊物が出版されたのは昭和48年1973年9月である。その1年前に中島健三は文部省を辞め大学に職を変えている。「現代化の失敗」と伴にその責任をとって去ったという観と感があるが、その評価は今後必ず見直されるはずである。なぜならば、確実に時代は科学的に進歩しており、小学校の子どもにも集合や関数についての知識が「相互作用的に用いるツール」として身につけなければならない時代が必ず来るからである。

そのことはともかく、中島健三が当然この出版物「指導資料」の中心的な編集者であることは間違いない。なぜならば、この本の執筆者は、協力者という名目で18名いる。中島健三も含まれていた。この書は、前述のように、太平洋戦争以前にあった「関数観念」の育成についてあらためて整理し、それを受け継ぎ「関数の考え」という統一した用語でその育成を強調した公刊物である。またそれだけではなく、「現代化失敗」の反省を拡声的に報道する当時の強い圧力に鑑み、予防線を張るがごとく、「集合の考え」の道連れとして「関数の考え」育成の方針までもが消されないようにと、昭和52年の指導要領改訂作業のはじまりへの警告という意味もある。

さて、「関数の考え」の意味である。公刊物として表題には「関数の考えの指導」とあるのだから、この書は「関数の考え」の定義的な意味を明確に知らせてくれるに違いない。それは当然の一般的な公刊物に対するとらえである。しかし、この指導資料「関数の考えの指導」における「関数の考え」の説明は、抽象的であり必ずしも明確とは言えない。少なくとも、小学校の子どもたちに直接「関数の考え」育てる仕事をする教師たちにとって、わかりにくい。

しかし、「関数の考え」の定義的な説明がわかりにくくなるのは仕方のない、当然のことである。「関数の考え」を端的に説明するのは難しい。なぜならば、「関数の考え」は「関数」の「考え」であり、「関数」の説明は前述のようにプロセスを表現して「 A は B である。」と宣言的に表現しにくいからである。「関数」の意味そのものが、関数概念の内容として、関係付けて、関係のきまりを見付けていくという一つのプロセスになっていて、幾つかの順番と段階がある。であるから「関数」の「考え」も同じように順番と段階があり、説明が長くなり複雑になってくる。それ故に、単純に「『関数の考え』とは〇〇である。」と宣言知識的に定義のように端的に説明しにくいのである。

すなわち、伴って変わる二つの変数 x 、 y があって、 x の値を決めると、それに対応する y の値がただ1つ決まるとき、 y は x の関数である、というのだが、その「関数である」と判断するまでには幾つかのプロセスがある。「変数」があり、「対応」があり、「ただ1つ決まる」というきまりがあり、一般化して「関係」があるとしていく。そのプロセスには、順番にしかも段階的に気付きがあり、それぞれの気付きの前後に状況があるという一つの流れの総体である。その幾つかのプロセスを「考えよう」というのであるから、「関数」の「考え」の意味の説明はそう単純ではない。それ故に、「関数の考えの指導」における「関数の考え」に対する説明の記述内容に多少の解釈や解説が必要になってくる。

そこで、この指導資料「関数の考えの指導」における「関数の考え」についての記述内容を詳しく取り上げて、そこにある定義的な説明を見だし、丁寧に解釈してみよう。

第1章「算数科における関数の考え」という章のなかで「関数の考え」の定義的な意味について総論的に説明している。第1章を「§1 関数の考えの教育的意義」と「§2 関数の考えの指導」の2節にわけて「関数の考え」について記している。2節合わせるとp1からp28までのボリュームである。この28頁内に「関数の考え」という語は、章のタイトルや小見出しを除き本文文章中に44回出てくる。その44回のうち「『関数の考え』は～である。」と「関数の考え」を主語として「関数の考え」の中身を述語として説明する文は7箇所ある。しかしながら、その多くはストレートに定義を語っていない。例えば「関数の考えは、算数で指導する内容の理解の為に中心的な役割をもつことが多い。」とか、「関数の考えは極めて重要な役割をしている」、「関数の考えは、人間が考えるということと本質的なかわりを持っている。」といった、「関数の考えの教育的意義」としての「重要性」や「背景」「関数の考えを指導するねらい」を記しているのみである。「関数の考えは〇〇である」といった定義に当たる宣言的知識風の記述がほとんど見当たらない。

「関数の考えは〇〇である」といった文は、ほとんど見当たらないのであるが、「関数の考え」の内包的な意味を、宣言的知識風に記している文は一カ所だけある。他の「関数の考え」を主語にしている文は、「関数の考え」の内包的な意味をストレートに語っていない。そこで、その文から「関数の考え」の意味を見いだしていく。それは以下の文である。

この関数の考えは、「自分のとらえようとする（まだよくわからない）事柄を、既にわかっているか、あるいはとらえやすい事柄に対応させて、必要によってはそれで置き換えて考えようとする」考えであるといえることができる。（文部省 1973 a）

「この関数の考えは～」の文から「関数の考え」の意味を解釈する。まず、「自分のとらえようとする（まだよくわからない）事柄」とある。このことから、まず前提的に「よくわからない『ことがら』」が始めにあるということがわかる。ということは、「とらえようとする」「まだわからない」とあるのだから、その始めの状況は、わかりたい、何とかとらえたいという子どもが居る状況だ。ある何らかの「ものごと」に対する興味をもち、関心を高め、それ故に意欲的にその「ものごと」を「問う」子どもがいる、と解釈することができる。

であるから、何らかの興味深い関心の高い「ものごと」を意欲的に「とらえようとする」「問う」子どもがいて、そこで「考えようとする」のである。その「考えようとする」ということは、その子どもは「考える」スタート時点にいる、と解釈することができる。その子どもは、まだ「考える」という行為をしておらず、これから「考えよう」としているのである。

その子どもが「考え」ようとしているその「考え」の具体的な中身は、これからわかろうとするために「対応させたり」「置き換えたり」という操作的なことである。すなわち、「とらえたい」「わからないこと」をわかるために、「既にわかっている『ことがら』」あるいは「とらえやすい『ことがら』」に、「対応させたり」「置き換えたり」することを、これから「考えようとする」というのである。ということは、「対応させたり」「置き換えたり」することを、頭の中であらかじめ「考え」めぐらせておくことができる。つまり、前もってあらかじめ「対応」や

「置き換え」を「考えようとする」のである。一言で言うならば、あらかじめ「考えをめぐらせる」ということである。確かに、国語事典（例えば「現代国語例解辞典」小学館）には、「考え」の一つの意味として、「予想」「覚悟」がある。

ところで、「考えよう」ということから「考え」を「予想」とか「覚悟」ととらえると、ここでいう「考え」は、これから始まる「自分のとらえようとする（まだよくわからない）」ことを学ぼうという自分の「学習に取り組む準備段階」(梶井 2017) である。いわゆる「自己調整」のひとつである。そこで、「関数の考え」をこれから始まる「学び」のスタートにある「自己調整」ととらえると、この「関数の考え」は、自己調整学習のプロセスの始めにある「予見の段階」としての「考え」と解釈することができる。「関数の考え」は自己調整学習の「予見段階」ととらえると、「関数の考え」の育成の重要性や必要性はなお一層高まる。なぜならば、「主体的な学び」といった能動的に学習を進める際には「自分自身の学習過程に能動的に関与していく」(伊藤 2016)「自己調整」の役割が大きいからである。

これらを合わせると、「小学校算数科指導資料・関数の考えの指導」における「関数の考え」とは、「とらえたい」「わからない」「ものごと」を「わかる」ために、「対応させる」「置き換える」など「関数」の概念を用いて、「とらえる」前のスタート時点でこれからのプロセスをあらかじめ考えておく、予想とか予見に相当する「考え」である。「関数の考え」は「自己調整」の一つであると解釈することができる。端的にまとめると、「関数の考え」とは、「関数」にもとづき予見することである。

「関数の考え」とは、「関数」のプロセスをあらかじめ予想していく「予見」という「自己調整」のひとつであるにとらえてくると、その予見の内容は、「関数的」でない「関数」そのものを用いた「学習方略の計画」であり、「考え方」という思考方法ではなく「写像」であるところの「対応」という思考概念「考え」そのもののなのである。であるから、「関数のように」考える方法「関数的な考え方」ではなく、「関数」の内容としてプロセスをあらかじめ予想・予見する思考行為そのもの、つまりそれが「関数の考え」である。

ところで、中島健三は昭和 56 年 1981 年 10 月に、「算数・数学教育と数学的な考え方」という書を著した。「今年が暦の上で区切りに当たることもあって、とりあえず」と還暦を迎えたときに「自分なりのまとめをしておきたい」(中島 1981 c) と、「関数の考えとは」という小見出しで「関数の考え」の説明をあらためてしている。そこにはこう記述されている。

一つの数量を調べようとするとき、それと関係の深い数量をとらえ、それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし、その関係を利用しようとする考えが 関数の考えの基本的な考えである。(中島 1981 b)

この文も、わかりにくい。なぜかというと『「関数の考え」とは〇〇である。』と宣言的知識風に命題として記述されていないからである。前述のように「しようとする『考え』』ということ、で、「関数」の中身としての「考え」であるから、プロセスを示すことになり煩雑になるのだが、どうして「関数の考え」を主語にして表現しないのであろうか。また、どうして「関数の考えの基本的な考えである。」とかえって複雑にするような書き方をしたのであろうか。倒置法的に「～

が関数の考えである。」といいきってもらえればわかりやすい。

そのことはともかく、この文から「関数の考え」には三つの順序的な段階があることがわかる。

i) 関係の深い数量をとらえる段階、ii) それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにする段階、iii) その関係を利用しようとする段階、である。

中島健三は引き続きその三つの「こと」について以下のように詳しく解説している。

i) 関係の深い数量をとらえる段階、

まず、ある数量について、他のどんな数量と関係づけられるか、その数量をきめればきまるか、その数量に伴って変化するか、というような見方に立って、数量を考察していくこと。

ii) それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにする段階、

次に、伴って変わる二つの数量について対応や変化の特徴を明らかにすることへ進む。対応や変化の特徴をとらえるには、変量の間の関係を表やグラフに表したり、式に表わしたり、式からよみとったりすることが必要になること

iii) その関係を利用しようとする段階

こうして、伴って変わる二つの変量の間の対応や変化の特徴が明らかになったら、その特徴をはじめの問題解決に利用すること。(中島 1981 b)

この三つの段階は、「伴って変わる二つの変数 x 、 y があって、 x の値を決めると、それに対応する y の値がただ1つ決まるとき、 y は x の関数である。」という「関数」の定義に対応している。「自分のとらえようとする (まだよくわからない)」変数 y があり、既にわかっている或いはとらえやすい関係の深い変数 x をとらえる段階がある。第一の段階はいわば「変数見つけ」の段階である。そして次に、わからない数量と関係の深い数量の間に、つまり x の値を決めると、それに対応する y の値がただ1つ決まるという関係を明らかにする段階がある。第二の段階はいわばいわゆる「一意対応」という「関係のきまり見つけとその表現」の段階である。そしてさらに、見つけた「関係のきまりとその表現」を利用する段階がある。第三の段階は「活用」の段階である。やはり「関数」の定義に基づく「関数」の「考え」なのである。

この三つのことを「考えようとする」ことが「関数の考え」であるとしている。この記述は、「関数の考え指導」発刊から7年後であるから、文部省からの公式見解の補足的な説明になっている。文部省の公式見解にこの中島健三の補足的説明を繰り返して並列させると、「関数の考え」とは、「自分のとらえようとする (まだよくわからない) 事柄を、既にわかっているか、あるいはとらえやすい事柄に対応させて、必要によってはそれで置き換えて考えようとする」考えであり、その考えようとすることは、「一つの数量を調べようとするとき、それと関係の深い数量をとらえ、それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし、その関係を利用しようとする」ことである。

さらにこの並列的した二つの説明を統合的に加工すると、「関数の考え」とは、「とらえようとする『ことがら』を調べようとするとき、それと関係の深いもうひとつの『ことがら』をとらえ、対応付けたり置き換えたりして、その間に成り立つ関係を明らかにして、その関係を利用しようとする考え」である。そして、その「考え」は「～しよう」という予見としての自己調整の意味を持つ「考え」であった。

以上のように、「関数の考え」とは、「関数」の「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していく」プロセスをあらかじめ予想していく「予見」であることがわかった。

2. 「関数の考え」はどこから来たのか

(1) 数学教育改良（改造）運動と「関数観念」

それでは、中島健三はどうして、太平洋戦争後「関数の考え」を強調し広めようとしてきたのか。それは、太平洋戦争後のこれからの日本の算数教育を考えると、「関数の考え」には戦後の日本にとって重要な教育的価値があると中島健三は判断したからである。前述の「新教育指針」が示す「科学的精神」の強調である。それならば、中島健三は、その「科学的精神」について、そしてその「科学的精神」に当たる数学の「関数」及び「関数の考え」にどのような重要な教育的価値を見いだしたというのであろうか。

そこで次に、中島健三が戦前にあったという「関数観念」からの「関数の考え」について、これからの日本にとっての教育的意義をとらえていく。そのために「関数の考え」の出所を、今度は太平洋戦争前の時代の経緯のなかに探り出し、「関数」と「関数の考え」に込められている重要な教育的価値という意義を探っていく。

中島健三が「関数の考え」という用語を確定し用いるようになった以前に、すなわち、「関数の考えの指導」が出版された 1973 年昭和 48 年以前までは、前述の通り「関数観念」という用語があった。小山正孝によると、「関数観念（函数観念）」という用語は戦前の数学教育でよく用いられたもので、今日でいう関数の考えや関数的な見方・考え方を意味するものである（小山 2000）と、中島健三の強調する「関数の考え」は「関数観念」と同じ意味であり、「関数の考え」の源は「関数観念」であるとするとする。それは「関数」に「観念」を付けた言葉遣いなのである。

「戦前の数学教育」というから昭和時代の前半、或いは大正、明治時代であろう。（その頃は「関数」は「函数」と表記されていたので「函数観念」と書かれている。しかしながらここでは、以下、引用文を除き、本来時代的には「函数」と記すべき所も「関数」と表記する。）中島健三自身も「関数の考えとその創造的な活用」と題する論文で「数学教育において、関数観念を重視することは古くから指摘されてきている。」（中島 1981 d）と「関数観念」という言葉を挙げ、「関数観念」からの「関数の考え」であることを示唆している。「関数の考え」、すなわち、前述のような「関数」の概念を内在している、「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していくことの予見」、そのもともとの意味や意義は「関数観念」にあるという。

それでは「関数観念」とは何か。なぜ「観念」という語が遣われたのであろうか。そこで、「関数観念」という言葉、とくに「観念」が用いられていた頃の当時の文献から、「観念」とされている「関数観念」の意味と意義を読み解いていく。まずは歴史的な文献から「関数観念」の出所をとらえてみる。

中島健三が「古くから指摘されてきている」というのには、二つの「古くから」がある。ひとつは 20 世紀初頭、つまり日本では明治時代に欧米で起きたいわゆる「数学教育改良運動」(The Reform of Mathematics Education 或いは Perry Movement) のことを意味している。確かに「関数観念」を始めとして「関数概念」「関数思想」という訳語が、この一連の「数学教育改良運動」についての日本語訳文献に頻繁に出てくる。であるから欧米で起きた「数学教育改良運動」に「関数観念」の出所があることになる。そしてもう一つは、大正時代から昭和時代初期、太平洋戦争前までの我が国の「数学教育改良運動」のことである。欧米の「数学教育改良運動」を受けて、それをリードした小倉金之助（1885 年明治 18 年～1962 年昭和 37 年）の主張がなされた時代を意味してい

る。であるからその時代に「関数観念」のもうひとつの出所がある。確かに、小倉金之助は「関数観念」という言葉を数学教育改良のキーワードとして強調的に多用し、「関数観念」を「涵養する」新しい算術教育、算数教育を提案していった。小倉金之助は太平洋戦争後も活発に数学教育改善に活躍した。「厳しい変遷の中にある時代で、『何の勇気もなく抵抗の精神をも失ったような善人は、結局のところ、ただの悪人と五十歩百歩だと思います。どんなことがあろうともこのような人間になりたくない』と言い切って」(阿部 1992) 戦前からのそして戦争中の数学教育の改善を怠ってしまったことを猛省し、戦後の復興にも病と戦いながら精力的に活動した。それ故に、小倉金之助の「関数観念を涵養する」という主張は確実に中島健三の「関数の考え」の育成に直接的に引き継がれていることになる。

そこで、まずは 20 世紀初頭に欧米で起きた「数学教育改良運動」を歴史的文献の事実を調べ、「関数観念」とは何か、「関数観念」の意味と意義に迫っていく。「数学教育改良運動」とは、20 世紀初頭にイギリスから始まり世界的に広まっていった文字通り数学教育の世界的規模の教育改良運動である。中島健三の上司として太平洋戦争直後の算数数学教育を伴に立て直した中心的メンバーである文部事務官の和田義信によると、1901 年明治 34 年に、英国学術協会 (The British Association for the Advancement of Science) の年会がグラスゴーで開かれ、この年会において「数学教育改良運動の第一声が挙げられた。」(和田 1952 a) とされている。

和田義信の訳では「Reform」を「改良」と訳している。しかし、その「数学教育改良運動」を調査し研究してきた、例えば上垣亘を始め、多くの研究者たちの文献では、「数学教育改造運動」(International Reformation Movement in Mathematical Education) (上垣 1998) と記され、「改造」という語が遣われている。「改良」よりも「改造」と訳されている文献の方が多いようである。「改良」以上に根本的な「改造」であったという認識である。いずれにしても、この「数学教育改良(改造)運動」とは、「Perry Movement」と呼ばれるように、当時のロンドン王立理科大学教授ジョン・ペリー (John Perry) (1850 年～1920 年) の「数学の教育 (The Teaching of Mathematics)」と題した講演を契機として始まり、欧米各地に波及していった一連の算数数学授業改善の動きである。

長年この「数学教育改良(改造)運動」を研究してきた天下卓司によると、当時 20 世紀初頭までにイギリスで行われていた算数数学教育は「数学は推論 (reasoning) の能力を鍛え、人格の陶冶を目指す古典の一教科」(天下 2011) であったという。いわゆる「形式性時代」である。そのため、科学研究が隆盛し研究成果を産業に応用することが求められてきた近代イギリスにおいて、算数数学教育が社会にそぐわないものとなっていた。

太平洋戦争直後東京教育大学教授であった鍋島信太郎が著したペリーの講演記録には、幾つものペリーの過激な主張を読み取ることができる。「彼らがかつて習ったような数学は、実際、まるっきり、役に立たないものである。」(鍋島 1953 a) とか、「われわれの教授法で、一等悪い欠点は、生徒が教師自らと同じ人間になろうとしているかのように教授することである。」(鍋島 1953 b) と、ペリーはその時代の数学教育の状況を痛烈に批判している。そして「憐れむべきは、普通の少年である。彼らは、自分には、少しの意味もない事柄の勉強を強いられて、精神が麻痺している。数学を学んで、他の学科の教師になったかなり優れた人でも、数学を勉強したときの習慣で、何かを教える際に、初めから抽象的な理屈を並べ過ぎるということである。」(鍋島 1953 c)、そして「中等学校の数学教師に適する一人の人間をつくるために、一万の普通の子どもが精神的に殺され、一人の偉大な数学者をつくらんが為に、万億の人間が滅ぼされているではないか。」

とペリーは当時のイギリスの数学教育の悪影響と無用性を痛烈に指摘している。そして、「これまでの数学教育の悪弊を打ち壊す」と具体的な実用化に向けた数学教育の改良・改造を訴えたのである。ペリーの運動は、いわゆる「古典に位置していた数学を、科学を基礎とする数学へ」、そしてすべての子どもたちのための数学教育へと転換を求めた運動なのである。

ペリーは、数学教育で「どのような内容を、どんな方法で教えられるべきかを決定するものは『有用性』である。」(大下 2018 a)とした。例えば、自然科学を学ぶ基礎となる数学の有用性や、「考える」という思考態度や思考方法を学ぶのに有効な数学の有用性を指摘し、数学が何に役立つのかという数学の有用性を観点として数学教育の改善を主張した。そして、ペリーは、研究会大会の会義で、数学を学ぶということは「科学的に思考する習慣を形成し、全国民に自ら考える能力を与えることで、最大の幸福をつくり出すことに帰結する。」(大下 2018 b) と述べ数学教育の改良・改造を訴えた。

そして、「科学的に思考する習慣を形成する」ために、「手足と同じように容易に利用できる思考ツール」(この思考ツールを「精神的道具」と訳している文献もある。)を与え、「自分で考え抜くことの重要性を教え、既存の権威の束縛から自由にし、自分が崇高な存在であると確信させる」(大下 2018 a) ようにしていく、という数学とその教育が本来あるべき自己の人間性への陶冶までも主張している。

その「思考ツール」のひとつ具体的なものとして「方眼紙」やそれを用いた「グラフ」を挙げている。そして、「方眼紙の使用」により「比例論」を学び、「比例論の幾何学への応用」へと発展させていくカリキュラム改革案を提示し、その流れのなかで「関数概念」を育てていくことを提案している。

またこの「思考ツール」としての「方眼紙の使用」について、現代数学教育思潮を研究した太平洋戦争敗戦直後広島大学教授であった戸田清によれば、「方眼紙の使用」での「グラフによる関数の表現」において「関数思想の重視」をみることができるという。そして、その「方眼紙」「グラフ」による「関数の表現」が、「関係的な見方、因果的な考え方へと発展し、証明という思想のなかにも命題と命題との関係を取りあげるという形」(戸田 1953 a) へといういわゆる論理的な「科学的思考」を高めていくという。このように数学における「関数概念」が「科学的に思考する」という「考え方」を身につけていくことをペリーは強調していたのである。

このようにペリーは、数学の持つ有用性のひとつである「科学的思考」の習慣化を主張し、そのひとつとして数学の「関数概念」や「関数思想」ということを挙げている。しかしながら、ペリーに関する日本語訳の文献には「関数観念」という「観念」のついた用語は見当たらない。「関数概念」とか「関数思想」なのである。「観念」は見当たらないのであるが、確実にその「関数概念」と「関数思想」という用語には、中島健三の主張する「関数の考え」の源にある「関数観念」といったことが含まれている。なぜならば、「関数概念」や「関数思想」にある「関係づけしていく」ということや、「関係的な見方、因果的な考え方」への発展、あるいは「命題と命題の関係へ」と論理的に高めていくなど、そのプロセスとそこでの見方考え方が強調されているからである。さらに、そのような「関係づけ」て、「発展させ」て、論理的に高めていくプロセスとそこでの見方考え方を含む「関数概念」や「関数思想」は、子どもが「自由に」「自ら」「自分で考え抜く」主体的な「科学的思考」のひとつとしてクローズアップされているからである。

さらにこの「関数概念」と「関数思想」は、子どもが「自由に」「自ら」「自分で」「関係を考える」

プロセスであるということから、このペリーの主張を日本語に訳す際にその主体的にする行為そのものをとらえ、「観念」という訳語にしていってと推察することができる。なぜならば、「関係づけ」で、「発展させ」で、論理的に高めていくプロセスである「科学的思考」を、子どもが「自立して」「自分で」「自由に」という個人的な主体的な行為としてすることが望ましいことであるとペリーはとらえていたからである。そして、日本人にとって「観念」は仏教用語として、ひとりの人間が自ら「観察して」「思念する」という個人的なプロセスの行為を意味するからである。

その「自立して」「自分で」「自由に」、「関係づけ」で「発展させ」で論理的に高めていくという主体的な「科学的思考」を育てるための具体的な望ましい教育方法について、ペリーは以下のように講演のなかで述べている。「自分で発見したことは、彼の真価となり、精神上における、永久的なものになるものである。これらのことを知らしめるのである。子供が、すでに持っている経験を基礎として教育せよ。彼等をして、彼等の見地から、観察せしめよ。即ち、自ら教育するように、彼等を導け。」(鍋島 1953 d) その講演記録にある「自ら教育するように、彼等を導け。」というペリーの子ども「自ら」の強調は、子どもの存在をたいせつにした教育の基本的な在り方をも強く示唆している。

さらに大下卓司によると「ペリーは、講演において『すべてのひとが、貧富の別なく、自然科学を学習し、数学を学習することは、我が国にとって最大の重要性を持っている』のであり、これにより『科学的に考える習慣を作り出し、すべての国民に自分自身で考える能力を与え、またそれによってあらゆる国民に最大の幸福を作り出す』必要がある」(大下 2011) と主張したのである。ここでも、子どもという人間が「作り出す」ことをペリーは強調し、前述のように人間性という人間としての本来の在り方までに言及している。

この「子ども自らが」「つくりだす」という主張に、和田義信が指摘するとおり「数学教育改良運動は、深い人間愛とか個人の基本的人権の尊重とことを背後に持っている」(和田 1952 b) ことがわかる。子どもを一人の「人間として扱う」という、子どもにも一人の人間としての「基本的人権」を求めていくという近代的精神がベースにある。

その基本的人権や人間性までも言及しているペリーの「数学的教育」という講演での主張を、和田義信は以下の 8 つにまとめている。

- (1) ユグリッドの形態から完全に脱離すること。
- (2) 実験幾何を高度に重んずること。
- (3) 数学の実用的方面を高唱したこと。
- (4) 立体幾何を重んずること。
- (5) 実用的な諸種の想定を重んずること
- (6) 方眼紙の使用を激励したこと。
- (7) 微積分の思想をなるべく早く得させること。
- (8) 試験のための数学から脱却すること。(和田 1952 b)

これら 8 つの項目のなかでも、「微積分の思想をなるべく早く得させること」という主張が、「関数観念」に繋がる。なぜならば、「19 世紀は函数論の世紀」といわれる数学解析の完成期において「函数思想の重要性が叫ばれた」という 20 世紀初頭の時代的背景があるからである。また前述のように、戸田清によれば、「方眼紙の使用」は「函数思想の重視」であり「グラフによる函数の表現」のために「最重要な学習内容の一つとして指摘されたもの」(戸田 1953 b) であるとし

て「関数概念」の重要性を指摘しているのである。

結果的にはこのペリーの講演「数学的教育」においては、大下卓司の指摘するように『自然科学の基礎学としての有用性』を満たすと同時に『思考方法としての有用性』を備えたカリキュラムを提案している」(大下 1018 b) と総括することができる。同じように鍋島信太郎に言わせれば、「ペリーの論旨の要点を挙げると」「数学の有用性を中心眼目とする」(鍋島 1952 e) 改良・改造であるという。すなわち、数学は、自然科学を学ぶのに有用であり、思考方法を学ぶのに役立つ教科で、それらの数学の有用性に気付かせ、子どもが人間として「自ら教育するように学ぶ」算数数学教育へと改良することを目指したのである。

その後、ペリーから始まった一連の「数学教育改良(改造)運動」は、国際的運動となって欧州各地に広まる。この「数学教育改良(改造)運動」を研究し和 30 年代に小学校での「関係概念教材の必要性」を強く訴えていた鈴木正毅によれば「翌 1902 年には、ドイツのクラインが関数思想の涵養を強調し、フランスのボレルも函数観念の尊重を主張していった。」(鈴木 1957) とその広まりを紹介している。ペリーの「数学教育改良(改造)運動」は主にドイツとフランスで盛んになっていったようである。

鍋島信太郎によると、ドイツのクラインは、「数学教育に関する講義を開始し」「大学で数学教育の講義をした世界最初」(鍋島 1952 f) の教授であり、ギムナジウム (Gymnasium) 文化高等学校における画期的な数学のカリキュラムを作成した。そのカリキュラムは「関数観念を中心として、でき得る所は一体に融合しようとする」「画期的な」(鍋島 1952 g) ものであった。このクラインのドイツにおける「数学教育改良(改造)運動」の説明に際して、鍋島信太郎は、クラインの改良の理念としての「Idea of Function」または「Funktionskonzepten」に当たる内容を「関数観念」という日本語に訳している。ここでは明確に「観念」という言葉を用いて訳しているのである。原典に当たり丁寧に解釈を今後緻密にしなければならないが、ペリーがあるいはクラインが主張していた「関数概念」を、子どもの行為として解釈しとらえ、その行為を強調するために鍋島信太郎は「関数観念」と訳したのではないかと解釈できる。

さらにこの「数学教育改良(改造)運動」は直ぐにアメリカにも波及した。和田義信によると、ペリーが改良意見を述べた翌年 1902 年に、当時のシカゴ大学の教授ムーア (Eliakin Hastings Moore) が、アメリカの数学会 (The American Mathematical Society) の年会の席上において「これはペリー運動の一部に過ぎない」(鍋島 1952 h) と公言し会長講演をした。これが「アメリカでの改良運動の第一声である。」(和田 1952 a) という。鍋島信太郎は、ムーアの講演について「とくに」「初等数学の将来に対するところでは、ペリーの主張を極力賞賛し、かつ敷衍している。」(鍋島 1952 i) と記し、ムーアは小学校における数学教育の改善にペリーの主張を取り入れることを提案している。

太平洋戦争直後大阪大学教授として「ペリー、ムーア、クラインの改良運動の意義」について総括的に一連の思潮を研究していた中村幸四郎は、20 世紀初頭の「数学教育改良(改造)運動」は、「ペリーの講演、ムーアの論説、クラインの思想に基づいて、『ペリー、ムーア、クラインの改良運動』といわれる数学教育の革新運動」となり力強く押し進められた。」(中村 1953 a) と記して、融合的な運動となって数学教育の改良・改造運動が波及していったことを示している。そしてその結果、その教育に「適する手段として」、「関数の概念をできるだけ早く導入すること」と「帰納的な論理をもって、生徒がまず第一に十分な数学的素材を身につけること」と総括的に

当時の改善の方策を挙げている。さらに中村幸四郎は、「函数の概念は、『変化』というものを積極的に数学の対象としようするときに、欠くことのできないたいせつな概念であります。」(中村 1953 b) として「関数概念」を重視していることを解説している。

と同時に「数学教育の改革を念願するのは、生徒ひとりが、ひとり自立した真理の発見者、知識の開発者となり得るように、彼らにこの目的に適した単純、素朴な、それだけに生産的・創造的な数学を所有させようと強調している点であります。」(中村 1953 c) として、「関数概念」を学ぶことによって、「自立した真理の発見者、知識の開発者」を目指していることに注目している。ペリーから始まったこの数学教育改良改造の運動は、総括的には「真理の発見」と「知識の開発」の為に、本来「生産的」であり「創造的」である「数学を所有させよう」というのである。中村幸四郎は、さらに「数学というものが、何かでき上がってしまった完成品として、神棚の中や、奥の院にまつてあるものであって、教師がいかに勿体ぶって、それを少しずつ生徒に頒ち与えてやるというようなものではありません。数学は絶えず作り上げられていく構成物なのです。」(中村 1953 b) とし、子どもが「発見し」「作り上げていく」をことが主張されているという。すなわち、ペリーを始めとした「数学教育改良(改造)運動」が主張したのは、数学教育では、「生産性」や「創造性」という自然科学やそこにある思考方法を学ぶのに有用な数学の本質を、子どもに「自立した真理の発見者、知識の開発者」として学ばせることであると中村幸四郎は一連の改良・改造運動を解説する。やはり、子どもの「真理を発見し」「知識を開発していく」「自立し」「作り上げる」プロセスを重視している。

このように、ペリーから始まった「数学教育改良(改造)運動」には、総括すると二つの主張があった。ひとつは、子どもが「真理を発見」する、「知識を開発」するように、数学のもつ「生産性」と「創造性」という数学の有用性を子どもに所有させることである。そしてもう一つは、その数学の有用性に気付かせるために子どもが「自分で発見する」「作り上げようとする」ようにし、子どもに「観察させ」「直観させ」「自ら教育するように導け」など、近代の民主的な社会にふさわしい子どもの「自立した」「科学的精神」や「関数概念」を育てることだというのである。中村幸四郎は、これらの「数学教育改良改造運動の精神は、数学教育の在り方を近代科学的にするということに尽くされるのであります。」とまとめている。

すなわち、「関数観念」という、「関係的」に見て、「因果関係」を考え、論理的に「命題と命題の関係を作り上げていく」という、「関係づける」プロセスには、自然科学の基礎を学び、思考方法を学ぶという直接的な教育的価値があり、さらに、「発見し」「開発していく」「自立し」「作り上げる」という自由に「真理の創造」と「知識の開発」に向かう人間性を高めてくという間接的な教育的価値があるのだ。

この子どもが「自立した」「真理の発見者、知識の開発者」へという人間性を高める教育の理念は、現在私たちが生きている 21 世紀の日本の教育主張である「主体的で対話的で深い学び」に込められている「子ども発」の「学び」と同じであり、120 年前の 20 世紀初頭にもう既に学習者の主体的な「学び」が提案されていたことを示しているのである。

ところで前述のように、ペリーから始まった欧米における「数学教育改良(改造)運動」に関することを日本語に訳した文献には「関数概念」とか「関数思想」という訳語は多く出てくるのであるが、「関数観念」という「観念」と訳されたものはあまり見かけない。「Idea of Function」や「Funktionskonzepten」をどのように訳したかなのである。「Idea of Function」や

「Funktionskonzepten」に相当する「関数概念」や「関数思想」の必要性は確かに改良改造のキーワードとして中心的な主張となっていたのだが、欧米での「数学教育改良（改造）運動」を紹介した文献には「観念」という訳語はあまり見当たらないのだ。

筆者によると前述のように鍋島信太郎のドイツの「クラインの思潮」に関する記述のなかに「関数観念」という訳を見つけることができたくらいである。もちろん、イギリスでのペリーの講演を始め、ムーアやクラインに関する文献を英語やドイツ語の原典で読み解き、「Idea of Function」を始め「関係を考え」「関係づける」といった「関数」を用いて考えるプロセスを意味する語を丁寧に原典から解釈していないので、「関数観念」の原語での出所とその意味について確定することはできない。今後丁寧に調べてみる価値がある。

しかしながら、前述のように、「自分で」という子どもからの学びを意図し、「子どもが作り出す」といった個としての行為のなかに「観察する」「思念する」という行為を見いだし、そのプロセスを「関数」の概念や思想に込めていこうとしていたと解釈するならば「観念」という訳語は誠にふさわしい和訳である。

以上のように、「関数の考え」の基には、欧米の「数学教育改良（改造）運動」での中心的理念として「関数観念」とか「関数概念」や「函数思想」がある。そしてその「関数観念」「関数概念」すなわち「Idea of Function」には、子どもが「真理の創造」「知識の開発」を目指し、数学のもつ「生産性」と「創造性」に気付いていくというプロセスがある。そしてそのプロセスである「関数観念」には、「自然科学の基礎を学ぶ」のに役立つ、そして「思考方法を学ぶ」のに役立つ「有用性」があるというのだ。さらに、その「有用性」に気付かせ「真理を創造」し「知識を開発」していくためには、学習する子どもの人間としての「自立」が必要であり、子どもの「見から」「観察せしめ」、子どもが「自ら教育するように、彼等を導け。」というのである。

この一連の「数学教育改良（改造）運動」では、数学のもつ有用な「生産性」と「創造性」を子どもに所有させるひとつの分野として「関数」をあげ、その「関数」を活用するプロセスとして「関数観念」を強調している。そしてその「関数観念」というプロセスにおいて、子どもが「自立し」「自ら」「自由に」考えるという、社会における「人間性」を求めた。科学的なものとともに「人間性」を求めたということは、20世紀初頭という時代を背景に考えると、「数学教育改良（改造）運動」の真のねらいは結局のところ「近代精神」の涵養であるということになる。和田義信は一連の改良・改造運動の背後にある「近代精神」を踏まえて、この「数学教育改良（改造）運動」のねらいを以下の5つにまとめ総括している。

- (i) すべての人間を人間としていかすこと
- (ii) 自由に考えることができるようにすること
- (iii) 実験を重んずること
- (iv) 実用性を重んずること
- (v) 函数思想を涵養すること（和田 1952 c）

この5つの改良改造運動のねらいから、真理の創造や知識の開発に向けて実用的な実験などを通して自由に考える人間として生きていくことに価値があり、そのためには、「関係を見いだしたり」「因果関係を考え関係付けたり」、あるいは論理的に「命題と命題の関係を作り上げたり」するプロセスのある「関数」を考えていく「関数思想」が重要であるとしている。

以上のことから「関数の考え」に当たる「関数観念」は、「関数概念」や「関数思想」とも表

現されているが、「関数概念」や「関数思想」に含まれている「関係付ける」「関係とみる」、論理的に「命題と命題の関係を作り上げる」といったプロセスを意味している。そしてそのプロセスを意味する「関数観念」には、「真理を創造し」「知識を開発する」ことに向かうことを通して自然科学の基礎を学び、そこでの思考方法や態度を学ぶことができるという有用性がある。さらにその「学び」の主体的な行為は、自由に自立して学ぶ近代的な社会における人間性を高めるという有用性がある。

すなわち、ペリーをはじめとしたこの一連の「数学教育改良（改造）運動」のひとつキーワードである「関数観念」の意味は、人が主体的に「関数」を活用し、事象を「関係としてみて」「関係づけて」論理的に「関係を作り上げていく」プロセスである。そしてこの「関数観念」の意義は、そのプロセスに於いて、自然科学の基礎としての知識を学び取り、そこでの思考方法や思考態度を学ぶという数学の有効性に気づき、自ら自由に真理を創造し知識を開発するという近代社会における人間性を高めるという意義がある。数学の有用性に気づかせ、近代社会における人間性を高める意義深い「関数観念」である。

「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していくことの見え」である「関数の考え」にも、数学の有用性に気付かせ、人間性を高める意義はあるのだろうか。この有用性に気付くと人間性を高めるという教育的価値は、子どもの「関数の考え」が表出する姿から「関数の考え」の教育的意義を学びとるときの研究の視点となる。

（2）小倉金之助と「関数観念」

次にこの「数学教育改良（改造）運動」が我が国に波及してきた頃についての「関数観念」をとらえてみる。そして、我が国における「数学改良（改造）運動」の様相から「関数観念」の意味と意義をさらに明確にしていく。

前述のように 20 世紀初頭のイギリス発の「数学教育改良運動」が諸外国にも影響を与えた。そしてペリーから始まりその後アメリカ、ドイツ、フランスなどに波及した「数学教育改良（改造）運動」は当然のことながらやがて日本にも影響を与えた。1914 年（大正 3 年）に始まったとされる第一次世界大戦に曲がりなりにも勝利国となり「五大国」の仲間入りを果たした我が国は、いわゆる信夫清三郎のいう「大正デモクラシー」の時代になり、民主主義の発展や自由主義的な風潮を背景にして、欧米の「数学教育改良（改造）運動」が伝わり日本の数学教育にも大きな影響を与えることになった。

ところで、本学名誉教授で数学史研究者の公田 藏によると、なんとペリーは、25 歳のとき（1875 年明治 8 年）工部大学校（1871 年明治 4 年工部省が官職技術者養成のために開校した工学校）の土木学の教師として来日している。日本での 4 年間に機械工学と数学を教え、1879 年明治 12 年イギリスに帰国している。ペリーはいわゆる明治時代の「お雇い外国人教師」だった。「Perry の日本及び英国における教育経験は、発展して彼の数学教育改造の提案となった。」（公田 2001）という。ペリーの「数学教育改良（改造）運動」が始動するひとつの要因として、ペリーの日本における数学教育実践の体験があることは事実であり、このことは我が国の算数数学教育にとって一つの誇りにも値する事実である。

また、大下卓司によると、日本の工部大学校でのペリーの授業では「学生を積極的に屋外に連れ出し、現象が起きている現場で学習」させたり、「実験にかかわる」授業をしたりして数学教

育の「教育内容及び方法の可能性を模索する機会を得ていた。」(大下 2018 c) というのである。鍋島信太郎によると、工部学校でペリーに学んだ「当時の生徒であった人の話では、随分変わっていたが、面白い講義であったということである。」(鍋島 1952 d) という証言がある。まさに「帰納的に」「直観的に」「発見的に」「創造的に」学習者が「自ら教える」という教育を日本で実際に実践していたのである。20 年後に講演することとなる「自ら教育するように導く」という学習する者の「自立」を促す教育実践を日本で試み実践をしていたのである。まさに実験的に生活の身の回りにある自然科学を学ぶのに役立つ実用性を重んじる、しかも学生が自由に考える人間性を重んじた、自ら考え作り上げる数学教育を試していたのである。

そして「1879 年、ペリーは帰国後日本での経験を整理し、イギリスの科学教育制度や教育方法について模索する過程で教育論を構築した」(大下 2018 c) という。「『子どもの視点に立つこと』が契機である。」とか「子どもの視点からカリキュラムを検討し、既有経験を生かした指導を行うことで、経験と知識を結びつける」(大下 2018 d) といった、子ども「自ら教育するように導く」ペリーの理念は、いくつかの日本での体験からの産物であるに違いない。そして日本からイギリスに帰国してから約 20 年後になされたのが前述のような「数学の教育」という講演であり、そこから始まったのが「数学教育改良(改造)運動」だったのである。となると、日本滞在は短い 4 年間だったのだが、明治時代の日本の学生たちのペリーとともに学んだ意欲的な数学学習の実際がペリーに与えた影響は大きい。そしてそれ故にペリーがその後日本の数学教育にも及ぼした影響もさらに大きい。

すなわち、和田義信が記しているように「諸外国におけるこの運動は、我が国にも波及しないではおかなかった。」(和田 1952 d) 先ず始めに、1917 年大正 6 年には当時の文部省がクラインの改良案であるその骨子を「新主義数学」(Die Mathematiknschmodernen Grundsätzen) と訳して紹介している。そしてこれを契機としてその直後我が国の「数学教育改良改造運動」の具体的な実践の動きが始まる。「歴史的な事実として現れたのは、大正 7 年 1918 年 12 月に、中等教育会が主催となって『全国数学教員協議会』が開かれたときである。このときを契機として諸外国における数学改良運動に応じて、我が国における数学改良運動が展開されることになった。」(和田 1952 d) という。またその翌年大正 8 年 1919 年には「日本中等教育数学会」が数学の授業改善のために設立されたという。

これらの動向を受けて、大正時代 15 年間の後半から昭和時代の初期にかけて、なぜか小学校の教師たちが早々と具体的な算術の授業改善の動きを始めている。例えば、大正 7 年 1918 年名古屋市視学官であった野地清學と高井彌吉は、文部省からの「新主義数学」を受けて「新主義算術」といった実用性のある教育実践を主張している。「過去の窮屈なる机上口頭筆端の筆法理論を重視せず、数理の根源基本を吾人の四圍に存する活教材に求め質的に生命あるものにつきこれを基礎として数理の妙を究めんとするにあり。」(野地・高井 1918) と算術の目的を高らかに提案している。そして、「要するに、新主義算術は活きたる事實に基づき活きたる筆法活きたる数理を発見し活きたる事實に應用するにあり」とした。(野地・高井 1918) まさにペリーの主張した「有用性」や「実用性」を小学校という学校での子どもたち具現化しているのである。しかも「吾人の」「生きたる数理の発見」などといった「自ら」の主体性をも強調している。まさに子どもが「自らを教える」かのような「活きたる数理を発見する」算術の授業を提案し実践している。

また、東京女子高等師範学校訓導の吉田 弘は、「新主義算術」から「狭い固定された算術書

を脱して廣い實生活へと踏み込まなければならない」吉田（1923）と「プロジェクトメソッド」を提唱している。これまた「廣い實生活」という「有用性」や「実用性」を重視した算術を提案している。さらにまた、和歌山県師範学校附属小学校の玉置光一は「作爲鑒作による数学教教育の改造」を主張し「小学校の函数では」「具體的事實に直面して、その実際に行はるゝ函数關係を洞察し、式にまで表示することのできる體驗に主眼を置かねばならぬ。式を見てその函数概念の研究をさせるのではなく、式にまでの函数概念を作ることに工夫しなければならない。」（玉置1929）と記している。ストレートに「関数觀念」の涵養を扱っているのである。そこでの「関数概念を作る」とはまさしく子どもが「觀察して」「思念して」いくというつくる行為「觀念」なのである。玉置光一の「関数概念を作る」ということは、まさにベリーを始めとした改良改造運動の主張である、関係的な見方で、因果関係を考え、論理的に命題と命題の関係を作っていく「関数觀念」を育てているのである。さらに、「洞察」とか「體驗」ということから、子どもが「自らを教育する」行為でもある。

これら以外にも大正時代の自由主義教育の風潮もあり、ベリー運動などが強調した子どもを「人間として生かす」、「子どもの視点に立った」、「子どもが觀察し、自らを教育する」といった算数授業の提案が幾つかの先進的な小学校でなされていった。もちろん全国規模から見ればこの授業改善の動きは一部ではあるが、全国各地でなされていったところが画期的である。

このようないわゆる欧米の「数学教育改良（改造）運動」からの「新主義算術」による具体的な実践が、師範学校やその附属小学校、或いは私立学校などを中心に紹介されていった。これらの算数教育改善への実践の模索は、当然明らかに欧米の改良改造運動をモデルにしていた。すなわち、数学の「自然科学の基礎学としての有用性」や、「関数觀念」を始め「思考方法の有用性」を気付かせ根付かせることを意図し、「子供が、すでに持っている経験」から始まる授業改善を目指していた。そしてその実践を意欲的に全国に広めようとしていた。大正時代から昭和初期にかけての、当時の小学校の先進的な授業改善の取り組みは、今後重要な教育実践研究対象になる。なぜならば、過去にあった実際の教育実践における成功と失敗が、「関数の考え」を育てていく今後のこれからの算数教育実践への道標になるからである。

1917年大正6年に国から示された「新主義数学」(Die Mathematiknschmodernen Grundsätzen)の紹介と、その影響で大正時代から昭和初期に盛んに各地でなされたこれらの小学校の「新主義算術」の研究とその授業実践の動きをまとめる形で、東京高等師範学校教授の佐藤良一郎は新しい「算術教育の精神」とそれに基づく「算術教育の方法」を「算術教育新論」と名付けて理論づけている。「ベリー、ボレル、ムーア等の人々の改良意見により編みだてられた數學、これが所謂新主義数学である。」(佐藤1928)と記して、昭和3年1928年「算術教育新論」を提案し、具体的な算術における授業改善を主張している。例えば、子ども自身に「発見させてかつその発見を検証させる」ようにする指導するという指導法を「歸納的方法」と命名し、その具体的な指導方法などを提案している。佐藤良一郎の具体的な授業改善の方法とその内容は、21世紀の現在の算数教育の於いても新鮮で有り参考になることばかりである。

このように、1918年大正7年の「全国数学教員協議会」から、さらに翌年1919年大正8年の「日本中等教育数學會」が創立したことから、大正時代から昭和初期にかけて我が国における「数学教育改良運動」が展開されることになった。

しかしながら当時の我が国の「教育全体が国家的に統制されていた」故に「並大抵ではない努

力を必要とした。」という。なぜならば、皮肉にも我が国は明治時代前期にペリーの「数学教育改良改造運動」以前の英国のいわば古い数学教育をモデルとして取り入れ、「国定算術書」を編纂し強行にその算術教育を進め、その制度を定着させていたからである。

その並大抵ではない状況下において、「関数思想」に基づき「関数観念」を算数数学教育の重点として算術教育の改良・改造を主張したのが小倉金之助（1885 年明治 18 年～1962 年昭和 37 年）である。和田義信は「この間にあって小倉金之助博士の努力は忘れることができないものである。」(和田 1952 d) と振り返っている。前述のようにいち早く改良・改造運動が起きたのは小学校であったが、その契機は小倉金之助の主張によるところが大きい。

小倉金之助は「ペリー、ムーア、クライン等の改造論が唱導されるや、それは一時に沸騰し始め、それは一代の輿論となって、急速の間に世界的運動となったのである」(小倉 1938) としながらも、日本の数学教育界は「ペリー、クライン等の改造思想とは相容るべくもなかった。それは寧ろ全然對蹠的であり、妥協さえも困難であった。」(小倉 1938) と、その後改善が進んだ昭和 13 年 1938 年に改善前のことを振り返っている。

小倉金之助は大正 13 年 1924 年「数学教育の根本問題」を著し具体的な数学教育の改良（改造）を主張していく。和田義信によると「小倉金之助博士が『数学教育の根本問題』を公にし、世界的潮流に基づいて我が国の現状を痛烈に批判し、改善の急務を力強く叫ばれた」(和田 1952 e) という。例えば、「文部当局は、全国一千万の児童に向かって、(1) この稚拙な『国定算術書』によって『むずかしい』『生徒の頭にたえられないような詰め込み主義』を実行させたこと、(2) そしてそういうことが、我が小学校算術教育の進展を阻害した最大の原因をつくったこと、深く遺憾として、何よりも先ず自ら深く反省すべきである。」(小倉 1937) とストレートに明治時代からの算術教育の批判を展開し、当時の文部省に改善を要求している。この小倉金之助の主張は、当時から言うならば二十数年前にイギリスで行われたペリーの「数学の教育」という講演内容を彷彿とさせる主張である。

この小倉金之助の文部省への批判を受けて、小学校算術の改良・改造に取り組んだのは若き文部省役人の塩野直道（1898 年明治 31 年～1969 年昭和 44 年）である。塩野直道は、ペリーを始めとする「数学教育改良（改造）運動」に基づく小倉金之助の「科学的精神」の理論をベースにして、「合理創造の精神」を打ち出し、算術においては「数理思想」の涵養を主張し算術教育の改善に果敢に取り組んだ。「普通の算術中には理論無し」という当時の国定教科書の考え方に反論し、「算術は日常の計算に習熟せしめ、生活上必・必須なる知識を与える」だけでいいのかと主張した。そして明治 38 年から 1905 年発行されてきた当時の小学校教科書「小学算術書」に対する改善を目論んでいた。そしてついに 1931 年昭和 6 年、新しく「小学算術書」の編纂、いや、それこそ「小学算術書」の改良・改造に当たる根本的な新しい編纂をするように局長からの命令が下るのである。そのとき塩野直道は若干 33 歳だったという。

塩野直道は、大正 13 年 1924 年 12 月の青山師範学校で小倉金之助の講演記録を読み「異常の興味と刺激と覚えた」(松宮 2007 a) といい、小倉金之助の「科学的精神」と「関数観念」を地道に学び、何とか「算術教育の根本理念を見直し」「数理思想」を打ち出したという。「数理思想」は「法令に反する」という文部省の普通学務局長に反対されつつも、地道に説得していき認めさせていったという努力を重ね、保守的な圧力に屈しなかったという。

「数理思想」について、塩野直道は、「算術教育の目的というものが数理を愛好し、これを追究

するの感情を盛んならしめ、そうして自然現象、社会現象、精神現象、その他各現象のなかに数理を見出し、これを解決し、進んでは数理的に正しく生活せんとする精神的態度を養うことが第一の条であると思います。これを数理思想と名付けている。」(松宮 2007b) と説明している。塩野直道の「数理思想」は「精神的態度」ということで、小倉金之助の「関数観念」にでてくる「科学的精神」と似ている点が多い。小倉金之助の「関数観念」はこの「数理思想」の一部として解釈することができる。「科学精神」としなかったことは、「算術」という教科の特性としての「数理」を強調したかったからである。

その後、昭和 16 年 1941 年「国民学校令」により、「知識の統合」という理念により、「理数科」という教科ができ、そのなかに「理科」と「算数」という科目ができた。それまでの「算術」という名称が「算数」になったのである。その際に、「理科」には「科学的精神」を育てることに重点を置き、それに対して「算数」では「数理思想」を育てることを重点として、算術教育時代にも強調された以上に「数理思想」を強調するようになったと解釈することができる。

それまでも「算術」教育の改善を「数理思想」という理念で改善してきた塩野直道は、「算術の目的は、児童に数理思想を開発し、日常生活を数理的に正しくするように指導すること」であると強調してきた。しかしこの「国民学校令」に伴って「算術」が改名されて「算数」が登場したことは、「算術」に「数理思想」を明確に強制的に加味して「算数」という教科名にしたと解釈することができる。なぜならば、塩野直道は、算術教育を改善するための意見を聴取する昭和 7 年 1932 年 5 月の文部省での会議資料に「算術科なる学科目の変更の必要ありや」という意見を第一項目に挙げているのである。そのことから「算術」に「数理」を強く取り込むことを始めから意識していたことを推察できるからである。すなわち、「算数」という教科名には、「算術」において主張された「数理思想」をより重点内容とすることとして「数理思想」を加味するという思いが込められているのである。その主張に基づいて新しく編纂された、いわゆる「緑表紙」や「水色表紙」と呼ばれる塩野直道が中心になった編集した教科書が、その「数理思想」の強調を醸し出している。

このように、我が国の「数学教育改良（改造）運動」が小学校で中心的に始動したのは、「新主義数学」の下で「新主義算術」の実践が師範学校附属小学校などで始まったことと、そして、塩野直道の小学校の「算術」に向けて「数理思想」による改善が大きな契機となっている。と同時に、これらの改善の動きのベースにあるのは、当然、小倉金之助の数学教育改善に向けた強い意志と強固な理念であった。その小倉金之助の理念について具体的にとらえ、小倉金之助の主張する「関数観念」の意味と意義を明らかにする。

塩野直道に大きな「興味と刺激」を与え、いわば「算数」という教科が生まれる契機をつくった小倉金之助は、「人生における科学的精神」をいかに修養し開発すべきかを重大な問題とし、自然科学との「交渉」が重要だと主張する。そして、「自然科学の根底には数学の精神が横たわっていること」(小倉 1973a) に気付き、「それ故に単に伝承的知識としての数学ではなく、本当に人として生きがための数学であるために、数学と自然科学とは、その志を等うして進まなければならぬ性質のものである。」(小倉 1973a) とした。その結果「数学教育の意義は科学的精神の開発にある」(小倉 1973a) と結論づけている。

小倉金之助は、それでは、数学教育の内容の核心は何か、と自問自答し、「数学教育の核心は関数観念の養成である。」とした。その理由として「数学上関数の観念こそ最も良く科学的因果

関係を語るものであり、しかもそれと同時に最も広くかつ最も深く、人間生活と交渉を有するからである。」と「科学的因果関係」と「人間生活と交渉」というところに「関数」「観念」の持つ教育的価値を見いだしている。

このように小倉金之助の数学教育改良・改造の理念として「関数観念」という文言が重要なキーワードとして登場する。そして、以下のような有名な小倉金之助の主張がある。この短い文のなかに「関数観念」という語が3回も主張されている。(1924年大正13年12月東京の青山師範学校にてこのことを講演したという記録がある。その講演会での「関数観念」と連呼する小倉金之助の姿が想像される。前述のように塩野直道に「異常な興味」を与え、感激させ、結果的に塩野直道をもって小学校の算術教育の改良・改造へと導き、「算術」改め「算数」という教科科目が生まれる契機となるのである。)

私はただ函数の観念が数学教育に必要であるというような、微温的なことを言うのではない。函数の観念こそ数学教育の核心である。函数の観念を徹底せしめてこそ、数学教育は初めて有意義であることを主張するのである。(小倉 1973 a)

そして、この1918年(大正7年)から始まった我が国の数学教育改良(改造)運動は、小倉金之助に言わせると「それは實に日本数学教育に関する、最初の『下からの』運動であったのである」(小倉 1938)と振り返っている。確かに、大正時代から昭和時代初期に盛んに行われた全国の師範学校附属小学校などの算数授業の改善のいくつかの提案は、まさしく「下からの運動」であった。もちろん、結果的にはこの小倉金之助の主張は塩野直道をも動かしたのであるから、「上からの運動」も起こしたことになる。

太平洋戦争直後文部事務官であった和田義信は上記のような小倉金之助の主張について以下のように記述している。「ここに注意しなければならないことが二つある。その一つは思想的地盤という言葉が用いられていることである。他の一つは、中学校の数学教育改良運動として展開したものが、小学校により大きく響いたものではないかということ」である。今現在でも、「下から」「上から」小学校における算数教育の研究研修が盛んなに実践される割には、中学校における数学教育の研究研修が低迷している。なぜ当時は小学校での研究研修が盛んに行われ実践されたのか、非常に興味ある研究課題である。なぜならば、塩野直道の「上からの運動」の以前に、前述のような小学校からの「下からの運動」が始めに起きていたからである。

さて、我が国の「数学改良(改造)運動」の経緯を振り返ったところで、我が国のこの改良・改造運動の中での「関数観念」の意味と意義を明らかにしていく。このように「思想的地盤」として「数学教育の意義は科学的精神の開発にある。」ということと「数学教育の核心は函数観念の養成にある。」という小倉金之助の主題としての「関数観念」とは具体的にはどういう意味であり、どういう教育的価値があるのであろうか。

小倉金之助は、前述のような「数学教育の意義とその中心問題」という題での講演会(大正13年1924年12月)で、「関数観念」について「関数概念」と比較して次のように話をしている。「観念」と「概念」の区別について明確に講演していたのである。

まず、「関数観念」とは「かような道程をたどるもの」と説明している。「かような」というのは、「例を挙げますなら、ここにたくさんの円を書きます。その円の半径が大きくなればなるほ

ど、この円の面積も大きくなるような気がする。そこで、この円の半径と面積との間に関係があるのだろうか。もし関係があるのなら、それはどんな関係か、その間の法則はどうだろうかということを研究する。その結果としてこの面積 A と半径 r との間には $A = \pi r^2$ という関係があることが知れます。かような道程をたどるのものが、すなわち関数の観念であるということである。」(小倉 1973 c) と講演記録に記されている。

つまり、「大きくなるような気がする」「関係があるだろう」「それはどんな関係か」「その間の法則はどうだろうか」と、「関数」に沿ったその折々の行動する前の「考え」である。その「考え」は、やはり前述のような「関数」のプロセスをあらかじめ予想していく「予見」である。

それをふまえて小倉金之助は続けて「関数概念」についても以下のように触れている。「そう致しますと、あるいは、函数は恐ろしい面倒なものではないか、と仰っしゃる方があるかも知れませんが、それは函数論と函数概念とを混同した話です。数学の一分科たるいわゆる函数論はなかなか高尚なものでありますけれども、わたくしがここでいうのは函数論ではないのです。それは函数概念なのです。科学的精神がわれわれの日常生活にある以上、函数概念もわれわれの日常生活のうちにある、われわれは函数観念とともに生きているのです。」(小倉 1973 c)

「函数概念もわれわれの日常生活のうちにある、われわれは函数観念とともに生きている」というのだが、この講演の記録文だけでは、「関数」の「観念」と「概念」についてわかりにくい。しかしながら「かような道程」という「道程」の語が「観念」と「概念」の違いを明確にしてくれている。「道程」という言葉から、「関数観念」とは「関係があるのだろうか」などの「気がする」といった気付きから始まる「研究する」という、その「研究する」プロセスである「みちのり」を意味していることがわかる。小倉の言う「観念」とは、学ぶ学習者が「気がする」ことから始まる学習者自身のいわば個人的で主体的な「現象の間に何か関係があるかどうか考える」そのプロセス、つまり「道程」にある姿なのである。「道程」での折々の「予見」である。

そして、その関係を追究する「道程」を振り返ってみるならば、一般的な法則があったことを知る。その後で振り返り知った法則を「関数概念」としたのである。いわば、「道程」の始めや中途のプロセスにあるのが「関数」を捉えていくという「観念」であり、「道程」のおわりに知ることができたプロダクトが「関数であった」という「概念」なのである。「道程」という言葉が「観念」と「概念」をシンボリックに明確にしてくれている。

ところで、大きく話題が変わるが、「道程」というと、当時流行していたであろう高村光太郎の詩がある。「道程」の詩は大正 3 年 1914 年発表であるからそれは小倉金之助 29 歳の頃である。この講演をしたときは大正 13 年 1924 年 12 月であるから詩が出版されてから 10 年後にあたる。小倉金之助は 39 歳である。39 歳で講演に臨んだ際に小倉金之助は、ふと高村光太郎の「道程」を思い起したのかも知れない。「僕の前には道はない」、「どこかに通じている大道を歩いているのではない」状況である。そのような状況で何かの対象に興味関心を持ち、そこにある「関係」に気付き、「関係」を見いだして、「関係」を「法則」として知っていくという「道程」「みちのり」なのである。その何らかの目的に向かい「みちのり」を進む際の、自らの個人的な「観察し」「思念する」という姿が「関数観念」なのである。そしてそこで結果的に知り得た「法則」が「関数概念」であるということになるのだ。いわば「僕の後ろに道はできる」その「できた」道が「関数概念」なのである。

なぜこの高村光太郎の詩を持ち出したかという、「概念や法則を創造的に導く」という「関

数の考え」の役割に当たる本質的な特徴を示唆してるからである。「僕の前には道はない」、「どこかに通じている大道を歩いているのではない」状況、というのは、「未知な『ものごと』」があるということであり、何とかしたいという、説明できるようにして、概念を明らかにして、問題解決していききたいという、興味・関心・意欲にあふれているのである。小倉金之助が講演で「道程」という言葉を使った意味と意義を読み取ることができる。

国語辞書（広辞苑）には、「観念」とは、第一の意味として仏教用語で「観察し思念すること」とある。つまりそもそも「～する」プロセスの行為を意味しているのだ。それに対して「概念」とは、「事物の本質をとらえる思考の形式」とあり、いわゆる「内包」と「外延」が明確であり、それ故一般性を持つ「意味」である。ということは、「概念」とはある程度の一般化などの思考が終えた後に表現される枠組みである。やはり、「僕の後ろに」「できる」「道」なのである。僕の前には「道」はないのである。

「関数観念」を、「関係」を求めて「観察し思念する」「道程」というプロセスを意味する、「研究していく」人間の姿と解釈していくと、ペリーに始まり小倉金之助らによって我が国にも波及した「数学改良（改造）運動」の主張に出てくる幾つかのことが、この「関数観念」という言葉でまさに統合されてくる。「自ら教育する」とか、「自分で発見していく」とか、「まず第一に生徒から」「子どもの視点から」「直観的に」「帰納的に」「発見的に」「創造的に」などといった文言は、すべて共通的に「子どもが」「観察し思念する」小倉金之助の言う「道程」のなかに内包されることばかりであることがわかる。やはり、「関数」の「観念」と訳したことは適切である。

例えば、新主義算術の主張で「四圍に存する活教材に求め質的に生命あるものにつきこれを基礎として数理の妙を究めん」とする授業提案をした野地清學と高井彌吉を始めとして、果敢に新しい算術教育を目指した小学校における教師たちの算術教育改善の授業提案は、まさに「子どもが観察し思念し」ていく「道程」の有り様を提案する内容だったのである。このように「関数観念こそ数学教育の核心である」という小倉金之助の理念に基づき、塩野直道の努力と共に、昭和16年1941年にはいわゆる国民学校の時代となり、それを契機に「算術」から「算数」へという新しい流れができ、その時代的流れに乗り官民一体となって、確実に一つの教育改善運動として全国に広まりし始めたのである。

しかしながら、残念なのである。その後の不幸なる太平洋戦争へと流れていくプロセスにおいて、「関数観念」という「科学的精神」は踏みにじられていく。「自ら教育する」という人間として生きていく生き方は奪われいくのである。国民学校という小学校でなされようとし広まりつつあった、「科学的精神」で「人間として生きる」具体的な一つの「関数観念」が育たないうちに、その精神は別の精神にすり替えられ、不幸な結末を迎えるのである。それこそ、「科学的精神」という「関数観念」による発見的で創造的な「観察と思念」で、あの時代の集団的ヒステリックな動きを論理的に何とかとめることができなかったのだろうか。悔やむばかりである。（ドイツでのクラインの「関数観念」もヒトラーの時代を迎えるにときどきようになっていったのかも興味津々である。）

「関数観念」という「科学的精神」が踏みにじられ別の精神にすり替えられたてしまった悲しい結末の後、太平洋戦争直後に文部省は「新教育指針」(昭和21年5月)を示した。そこには皮肉にも「日本国民は合理的の精神にとほしく科学的水準が低い。」という見出しタイトルつけ、「竹やりをもつて近代兵器に立ち向かうとしたり、門の柱にばくだんよけの護り札をはつたり、神風

による最後の勝利を信じたりしたのである。」と記して、二度とこのような「科学的精神」が失われることがないようにしたいという願いが込められている。それは、小倉金之助の主張の下、そしてその主張に基づく塩野直道の「合理精神」のスローガンで新しくできた「算数」、その「算数」を実践していった多くの教員たちの、人間らしく「自ら」「子どもの視点で」「科学的事実を学び」「事実という現象」にある「関係の法則を学ぼうとする」「科学的精神」が、すなわち数学教育として本質として目指すべき「関数観念」が、壊されていったことへの強い反省でもある。

このように、欧米からの「数学教育改良（改造）運動」を源とする「関数観念」とは、「自然科学を学ぶ」そして「思考方法を学ぶ」基礎として、「関係づけ」て研究するという「科学的精神」が込められ、子ども「自らが教育していく」主体的な人間らしいひとつの行為としての、「観察」と「思念」なのである。

以上のことにより、中島健三が主張する「関数の考え」とは、欧米からの「数学教育改良（改造）運動」理念から生まれた「観察し思念する」という小倉金之助の「道程」である「関数観念」を源としていることがわかってきた。その「関数観念」とは、人間一個人として自立して、自由に自ら、「観察」して「直観」し「思念して」「関係づけて考える」という科学的な人間の行為である。その科学的で人間的な「関数観念」という行為は、「関係的な見方」で「因果関係を考え」、論理的に「命題と命題の関係を作り上げ」ていくプロセスであり、結果的に「自然科学を学ぶ」為の行為であり、「思考する方法を学ぶ」為の行為でもある。そのために「真理を創造し」「知識を開発する」という目的に向かう「関数観念」は、「生産的」で「創造的」な数学のもつ有用性やよさをも学ぶことになる。

すなわち、「関数観念」は、「観察し」「思念し」「関係づけていく」というプロセス「道程」を意味していること、そして、その「道程」には、「創造的かつ生産的に知識とそこにある真理を獲得する」というよさと、結果的に「自然科学の基礎を学び、思考する方法を学ぶことができる」というよさがある。この「創造的・生産的な知識と真理の獲得」と「自然科学の基礎と思考方法の学び」が「関数観念」の意義であり教育的価値である。これらの「関数観念」の意味と意義が、中島健三の「関数の考え」への引き継がれていくのである。

確かに、中島健三は、「『関数の考え』が重要な役割をもち、それを重視しようとするねらいとしては、次のように」（中島 1981 e）と以下の三つのことをあげている。a) 事象を考察する能力・態度の育成と概念や法則を創造的に導くこと、b) 算数・数学の内容の理解を深め統合的発展的な考察ができるようにすること、c) 問題解決が有効にできること。これら三つのことは、ペリー運動から小倉金之助の「関数観念」に出所があることがわかってきた。

「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していく」プロセスをあらかじめ予想していく「関数の考え」という「予見」は、「創造的・生産的な知識と真理の獲得」と「自然科学の基礎と思考方法の学び」へのいわばプロローグである。

3. 「関数の考え」の現状と改善点

（1）満足すべき状況ではない、その原因

2021 年令和 3 年は、太平洋戦争が終了し 76 年目になる。ペリーの「数学的教育」講演会が 1901 年だったことから数えると丁度 120 年が経った。はたして、「関数観念」や「関数の考え」は、教

育的意義を込めて育てられてきているのだろうか。「創造的生産的な知識と真理の獲得」と「自然科学の基礎と思考方法の学び」という有用性があり、そして自立し自由に「考える」豊かな人間性を育てるという教育的意義深い、「関数観念」は、120年間欧米の各地で教育されてきているのだろうか。

そしてその影響を受けた日本の小学校では、小倉金之助の「変化」に気付き、「対応」「関係」を「観察し」「思念していく」「関数観念」を育てるという目標を引き継いだ、中島健三の「関数の考え」は75年間育てられてきているのだろうか。すなわち、関係の深い数量をとらえ、それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし、その関係を利用しようとする、「関数」のプロセスをあらかじめ予想していく「予見」する「考え」は、太平洋戦争後も小学校で育てられてきているのであろうか。

残念ながら「関数の考え」を育てる教育は成果を上げていないといわざるを得ない。もちろん、「関数の考え」が育てられているかいないかを検証する方法が必ずしも妥当なものとして確定されていない。また、「関数の考え」はあくまでも「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していく」プロセスをあらかじめ予想していく「予見」であるので、「予見」を安易にとらえることはできない。それ故に、「関数の考え」の育成結果を何らかの確証をもって評定することはそう簡単なことではない。

しかし、「関数の考え」が育成の成果が上がっていないことを示す幾つかの事象が出てきている。それこそ、「わからない『予見』」をわかろうとすると、「関数の考え」と関係して表出する関係の深い幾つかの事象から、断片的ではあるが「関数の考え」は育成されていないと判断することができる。

例えば、2018年平成30年度と2019年平成31年度の「全国学力・学習状況調査」の結果が、「関数の考え」の育成が不十分であることを示唆している。「関数の考え」に関連した調査問題正答率は50%に満たない項目が多い。具体的に一例を挙げるのならば、平成30年度調査においては、円周率の理解の正答率が41.9%であった。また、グラフを読み取り解釈をする問題の正答率が20, 0%など、「関数の考え」が育成されていないことを要因とする数量関係についての理解の不充分さが目立っている。

また、中島健三の主張してきた、「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していく」プロセスを意図し、そのプロセスを完全な流れとして丁寧にたどるように記述された教科書記述は皆無といってよい。

すなわち、関係の深い数量をとらえ、それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし、その関係を利用しようとする、三つの段階を順序よくすべてあらかじめ予想させ「予見」させる子どもの姿を求める教科書は見当たらない。もちろん、三つの段階すべてではなく部分的には「関数の考え」を活用するプロセスを表現するようになった教科書も近年出版されるようになった。しかし、トータルに「自分のとらえようとする」「まだよくわからない」という主体的な行為から始まる「依存関係に着目し」「関数関係」を「見つけ」「用い」「表現」し問題解決していくというプロセスを完全な一つの「道程」として表現している教科書は見当たらない。ほとんどの教科書が、例えば「正三角形の数とまわりの長さの関係を調べましょう。」と、予め二つの数量を与えてその関係を考えるという状況設定なのである。これでは、「関数の考え」の始めの第一段階が割愛されている不十分な教科書である。

この第一段階を割愛した不十分な教科書の代表的な不十分さは、いわゆる「関数の考えの第一歩」の無視である。今まで指導要領が5回改訂されてきて、改訂の度に出版される「指導書」や「解説書」には必ずといっていいほど毎回記載されているのが「関数の考えの第一歩」(例えば文部省1989)というフレーズである。「依存関係に着目することが、関数の考えの第一歩である」という「関数の考えの第一歩」である。「関数の考えの第一歩」とは、わからない数量がありその数量をわかろうとするために、他のどんな数量と関係付けられるかを明らかにする、という中島健三のいう「第一段階：関係の深い数量をとらえる段階」に当たることの予見である。

すなわち、自分がとらえたいよくわからない興味ある「ものごと」があり、その「ものごと」を変化する数量をとらえ、そのわからない「ものごと」ともうひとつの変化する「ものごと」を見いだし対応付けて「依存関係に着目」していくことを予見するという「関数の考え」の始めに当たるのが、「関数の考えの第一歩」である。いわば、「関数の考え」の「道程」のスタート部分である。この部分がほとんどの教科書にはない。予見させることには価値を見いだし、急いで「関係のきまり」に気付かせ、関数に関する知識を伝達するという意図が見える不十分な教科書記述である。これでは、「真理の創造」や「知識の開発」へ向かう態度は育ちににくい。

なぜならば、始めの「興味・関心・意欲」に基づいた、自ら主体的な「観察」「思念」でないと、「発見する」「つくる」ことに向かうその後のプロセスが意欲的に起こりにくいからである。また、これではいわゆる「自己学習調整」の力量も育てることができない。それ故、今般盛んに求められるコンピテンシー (competency) ベースの学力育成も始まらないのである。

そのような教科書の実態であるから、関係の深い数量をとらえ、それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし、その関係を利用しようと予見をさせながら、子ども自らが主体的に「真理を創造し」「知識を開発する」プロセスをねらった授業実践事例の報告もほとんど見かけない。確かに、この「関数の考え」を研究テーマにした実践研究もあまりない。この現況に対して、昨年度末2020年3月に筑波大学附属小学校算数研究部が発行した「算数授業論究」にて「関数の考え」を特集したことは画期的なことであり、「関数の考え」育成推進の大きな契機となる。

もちろん教科書は経過よりも結果を記述し、得られた知識などを復習的に見せることがひとつの役割であるから、教師の「教科書の扱い方」に今後の課題がある。そういう意味では、昭和初期にあった師範学校附属小学校など先進校における数々の算数授業改善が、令和初期にも期待される。そういう意味でも、筑波大学附属小学校算数研究部が発行した「算数授業論究」は意義深い。

以上のようにとらえてくると、確かに「関数の考え」を育成することに対する現況は「満足すべき状況ではない」のである。どうしたことであろうか。テストのための数学教育を根本から改め、「有用性」を観点にして改良・改造しようとしたペリーから始まった「科学的精神」は何処にいったのか。そして欧米の改良改造運動が我が国に波及したことによって生まれた、小倉金之助の「科学的精神」である「関数観念」は何処へ行ったのか。そして小倉金之助の「関数観念」を引き継いだ中島健三の「関数の考え」という三つの段階は何処に行ってしまったのか。50年間に及ぶ指導要領における「関数の考え」の育成の法的要請は、現状の算数教育実践では、残念ながら無視され、まさに「笛吹けど踊らず」という状況なのである。

太平洋戦争で屈してしまった小倉金之助の「関数観念」育成と同じように、受験戦争と現代化への批判によって、中島健三の「関数の考え」の育成も同じような運命をたどるのであるか。

小倉金之助の戦後の猛省に発した言葉が身にしみる。「小倉の念願は『もっと強い人間になって、できる限りの実効性を持った人間として死にたい』ということであった。」(阿部 1992) と小倉金之助は太平洋戦争時代の自分の至らなさと自分の実効性のない無力さを嘆いている。「できる限りの実効性」という言葉が自分に酷く響く。

中島健三自身も「この関数の考えは、新しい量の創造や基本図形での取り扱いにも深くかわり、重要なアイデアのはずだが、近年は何か下火になっていないかと案ぜられる。」(中島 1997 e) と戦後 50 年の節目に語っている。「ゆとり」が話題となった 1977 年昭和 52 年改訂の学習指導要領が公示された時期に、「実質において、関数に関する考察の重視が、算数・数学の進展にどのような形で現れてくるかという立場で考えたときには、必ずしも満足すべき状況にあるとはみられない。」(中島 1981 f) と記している。そして「昭和 52 年の新学習指導要領の改訂以来『関数の考え』に関する研究や指導面での関心が薄らいでいるのではないかと危惧されるような面があり、大変へん残念である。」(中島 1981 g)) と不満足を表明していた。中島健三が昭和 48 年 1953 年に小学校算数指導資料「関数の考えの指導」を発刊して数年後にはもう「満足すべき状況ではない」と表明しているのである。

そこで、「関数の考え」の研修・研究が「下火」になり、「関数の考え」の育成の授業実践が高まらない「満足すべき状況にない」原因をとらえてみる。そして昭和 50 年代から現在に至るまでの「関数の考え」の研究とその実践の「下火」になった原因経緯を探り、さらに「関数の考え」を育てる具体的な算数授業の改善点を見いだし今後の展望を試みる。

前述のように、「関数観念」といわれてきた「関数の考え」を昭和 40 年代にストレートに世に送り出すことができた背景には、アメリカからの「算数数学教育の現代化」の風潮があった。もちろん中島健三を始めとする推進者たちの努力が大きいではあるが、それとともに、いわゆるアメリカの「スプートニクショック」からの理数科重視の「現代化」の動きが、我が国での現代化と伴に「関数の考え」の育成を強力に後押しした。

しかしながら、その後の昭和 52 年 1977 年の学習指導要領改訂に向けて「教育内容の現代化」は影を落としていく。1976 年、M・クラインの「数学教育現代化の失敗・ジョニーはなぜたし算ができないか」の出版に象徴されるように、「アメリカにおける現代化にかなりの行き過ぎがあって、それに対する批判が出た。」(中島 1981 g) という時代を迎える。その「現代化は失敗である」とのことにより「我が国でもいかにも極端なことが行われているがごとく批判され、報道された。」のである。その報道により形成された世論が「当事者に大きな圧力となって」昭和 52 年 1977 年の学習指導要領が「学習負担の適正化」に向けて改訂された。いわゆる「ゆとりある充実した学校生活の実現」へと方向転換である。この「現代化」の失敗論があまりにも大きく、歴史的に引き継がれてきて、「関数の考え」をも飲み込んでしまいそうになったのである。「関数の考え」の研修・研究の下火の大きなひとつの原因は、現代化の失敗という報道による圧力である。

中島健三は昭和 44 年 1969 年には文部省を辞めているので、昭和 52 年の学習指導要領に関しては直接の「当事者」ではなかったのであるが、報道の圧力の影響を受けて改訂された昭和 52 年 1977 年の学習指導要領に対して「必要以上の変革になった」「数学教育に関係する立場からは大変残念なことである」とコメントしている。とくに「現場で実践する人たちにも心理的に大きな影響を与えた点」をあげ「決して望ましいことではなかろう。」(中島 1981 g) と記している。

すなわち、我が国には小倉金之助の「関数観念」がもともとあり、戦後間もなく「関数観念」

を復活するかのように「数量関係」に着目した「関数」を考える数学教育を進めようとしてきたのだが、あまりにも現代化に対する世論が強く、現在に至るまで「関数の考え」の育成を叫びにくくしていった。しかし、「関数の考え」の育成の重要性を歴史的に引き継いでいる文部省は、「現代化の失敗」報道による世論に屈することなく「関数の考え」の育成は継続的に求め、当然のこととして、「ゆとり」を標榜した昭和 52 年の学習指導要領でも強制的に「関数の考え」の重要性を表明している。昭和 53 年 1978 年 5 月「小学校指導書算数編」でも「関数の考えを伸ばすことが主要なねらいである」と明言しているのである。

しかし、あまりにも「現代化失敗」の余波は大きく、確かに「現場で実践する人たちに大きく影響し」「関数の考え」育成の意味と意義が失われつつある。アメリカからの急激な「数学教育現代化」の波に乗じて「関数」と「関数の考え」にも意識が傾いたのだが、その波が去ったときに「関数の考え」を育成する意欲も低迷していったのである。何とかしなければならない。

「関数の考え」の育成が下火になってはいけな。なぜならば、「関数の考え」からはじまる営みには重要な教育的意義があるからである。古くはペリーを始めとする改良・改造運動で主張された、「自然科学の基礎を学ぶ」「思考方法と思考態度」を育成する有用性があり、主体的で自ら考える近代の人間性を豊かにするという教育的意義があるからである。また新しく迎えた 21 世紀は「新たな価値を生み出していく」ために「知識を創造し」「共存共栄をめざす」「知識基盤社会」となり、「真理を創造し」「知識を開発し」ていくことがますます求められている。その「真理創造」「知識開発」に有効な「関数の考え」の育成が緊急課題であるからだ。

折しも、学校教育法第 30 条の「学力規定」に則って、新しい学習指導要領が 2020 年度令和 2 年度から全面実施となり、大学入学試験をはじめ各学校種の入学試験の内容が、いわゆる「思考力・判断力・表現力」にシフトしつつある、新学力観への移行期である。ペリー運動の時代から求められてきた「試験のための算数・数学」教育といった形式暗記学習からの脱却にやっと改善の兆しが出てきた。これらの兆しは、「下火」になっている「関数の考え」を育成することには追い風であり、「関数の考え」育成を強調しその学習指導を推進していくチャンスである。

「関数の考え」の「下火」という低迷のひとつの大きな原因は、前述のように「現代化」といういわば太平洋の向こう側から急激にやってきた津波による災害のようなものであった。それは、本来予定にはなかった突発的な外圧的な原因であったとも解釈できる。なぜならば、大正時代（1921 年～1926 年）にはペリー運動が波及し、既に「関数観念」育成の運動が始まっている。そして、昭和時代にかけて算術・算数教育改良・改造の動きが連続的にあったからである。別の言い方をするならば、我が国の算数教育現代化は、大正時代から始まったということが出来る。記述してきたように、小倉金之助の算術教育改良・改造運動は、当時の科学技術に見合った有用性と人間性を求めたその時代の現代化でもあった。もちろん今現在の時代から見れば「近代化」になったのである。いずれにせよ、「関数観念」や「関数の考え」の育成が、太平洋戦争後も廃ることなく受け継がれて来ていたところに、急激に現代数学への波が来て、「関数の考え」が「下火」になったのである。自然災害ではなく人的災害のようなものであるかもしれない。

しかし、災害は復興すればよいのである。いわゆる「現代化」が去ってもう既に 30 年以上になる。この 30 年間という長い時間が証明しているかのように、一度「下火」になったことを復興させるのはたやすいことではない。しかし、「関数の考え」育成に関する歴史のなかにある財産がある故に必ず復興できるはずである。例えば、前述のような、昭和初期に各地の小学校で起

きた「下からの運動」である「新算術主義」の研究は貴重な財産である。

現在も目立たないかも知れないが「下火」ながらも地道に「関数の考え」の育成に取り組んでいる研究者や実践者はいる。(例えば、平成20年に始まった教職大学院での現職教員による「関数の考え」に関する実践研究がいくつかある。)しかも、前述のように、入学試験の改善や「知識基盤社会」に向けた教育、「自己調整学習」を始め「コンピテンスベースの学力」といった新学力観への時代的要求が「関数の考え」育成への復興を後押しし応援しているかのようである。これからの時代、21世紀中期は「関数の考え」育成復興のチャンスである。

「現代化」の津波が去った後も、相変わらず「関数の考え」の育成は「下火」である。ということは、未だに「関数の考え」育成が一般化せず「下火」になっている原因は、もはや「現代化」という外圧ではない。その原因は他のところにある。その原因を指摘し改善すればいいのである。それは「関数の考え」の主張のなかにある内部的な原因である。この内部的な「関数の考え」の指導を「下火」にしている問題点をとらえ今後の改善点を展望していく。

(2) 今後の「関数の考え」育成の Point

「関数の考え」が「下火」になっている内部的な原因として一番大きなことは、前述のような「関数の第一歩」の扱いの欠如である。今後の改善点は「関数の考えの第一歩」の重要性の再認識とその教育実践である。

「関数の考えの第一歩」が欠如しているということは、主体的行為として「考えよう」と「考える」思考行為が始まらないということになる。さらに悲劇的なことは、「関数の考えの第一歩」から始まる、その後の関数学習が子ども主体で始まらないということである。これは改善すべき大問題である。なぜならば、「関数の考え」による「関数」学習が主体的な行為として始まらないのであれば、「関数の考え」と「関数」学習が目指す「真理の創造」と「知識の開発」を自らのこととして体験できないからである。「関数の考え」が主体的な行為として具現化しないのならば、形式を踏むだけの、既にある法則の確認をするだけの、それこそ形式的な「まるで役に立たない」ペリー運動以前の教育に過ぎないからである。

前述のように「関数の考えの第一歩」の扱いが教科書の記述としてほとんど皆無である。それ故に「関数の考えの第一歩」に相当する実践もない。実践がないから「関数の考えの第一歩」の実践的理論研究もなかなか帰納的に構築されないままである。そこで、あらためて「関数の考えの第一歩」をとらえ直し、その授業の在り方や教材に改善点を見いだす。

そこで「関数の考えの第一歩」とは何か、その意味をさらにより明確にとらえ、「関数」にもとづくその予見は、何によって生起するのかとらえてみる。「関数の考えの第一歩」とは何かと、それは何によって始まるのかが分らないと、授業の在り方やそこでの教材の質が定まらないからである。「依存関係に着目することが、関数の考えの第一歩である」(例えば「平成元年小学校指導書算数編」(1989 文部省)という。「依存関係に着目する」という予見とは何か、そして何によって起きるのであろうか。

まず、「予見」について考える。前述のように「関数の考え」を「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していくようにする」という「関数」にもとづきあらかじめ予想していく「予見」と規定し、「～しようとする」を特徴付ける意味でそこに「予見」という言葉を用いた。「予見」とは「そうなるまえに見とおして知る」ことであり、準備的な心づも

りでもある。

「予見」を準備的な心づもりととらえると、心理学的な見地からいうならば、「予見」はひとつの「態度」ととらえることができる。なぜならば、「態度」とは、「何らかの反応準備態」(竹村 2018)であり、「一定の方向付けを与える心的準備状態」(岡 2001)であるからだ。国語辞書的な「態度」の意味でいうならば、例えば「そぶり」「ようす」「しぐさ」の方の日常生活のなかで用いられる表出した行動としての「価値判断を含んだ概念ではなく」(竹村 2017)、「心構え」「身構え」に当たる意味の方である。

また、「心的準備態」とは「心の」であるから育てることが可能である。それ故「態度」は教育対象である。「態度」の「態」という漢字は、訓読みすると「態とする」は「わざとする」であり、「態々する」は「わざわざする」である。すなわち、「関数の考え」(「関数の考え」だけではなく多くの望ましい態度)はわざわざさせる「態度」であり、それ故、放っておけば「しない」のである。つまり、教育によって「わざわざ」するように意図的に形成することができる指導内容である。

「関数の考え」は、教育すべき、また教育できる予見的な「態度」である。もちろんその教育方法が問題となるのだが、ペリー運動で主張されたように、形式的ではなく、有用性と人間性をねらいつつの「態度」形成である。ということから、「関数の考えの第一歩」は「自分のとらえようとする、まだよくわからない『ことがら』があり、その『ことがら』をわかってほしい」「関数」概念のはじめにある「依存関係に着目」しようという予見的な「態度」である。

さらに、いくつかの「小学校指導書算数編」では、「依存関係に着目する」ことについて以下のように説明している。「依存関係に着目する」とは、「まず、ある数量について、他のどんな数量と関係付けられるかを明らかにする。つまり、ある数量を決めれば他の数量は決まるか、あるいは、その数量に伴って一定のきまりに従って変化するか、というような見方にたって、数量を考察することである。」(1989 文部省)と説明している。「関数の考え」の始めにある、今後の「わかってほしい」ために「関係付けていく」ことから始まるいくつかの見方に立った考察である。考察であるから、やはり前もって考えて察する予見的態度である。

一方、中島健三は、「第一歩」について以下のように説明している。「依存関係に着目する」このような「着目」するは、「科学的精神に基づいた関数の考えによる取り組みの第一歩である。第一歩という意味は、『きまり』を確定する手法その他までは、幾多の問題が残されていることを指す。」(中島 1981 h)と記している。つまり、その先には「きまり」を見つけるまでの「幾多の」「みちのり」があり、そのスタート地点であるということである。「関数の考えの第一歩」は「科学的精神」によりこれから創造的に問題解決へと「『とらえたい』という考えで立ち向かおうとすること」(中島 1981 h)なのである。「立ち向かおう」という予見的な態度である。

であるから、「関数の考えの第一歩」は「科学的精神」によって生じるという。そこで「科学的精神」についても再確認する。「科学的精神」については、前述のようにペリー運動からの影響で小倉金之助が「数学教育改造の基調・特に小学校を中心にて」と題した、大正 13 年 1924 年青山師範学校での講演会で、以下のように語っている。

「しからは、『科学的精神とは何ぞや』と申しますと、わたくしはこういうふうを考えたい。ここに多くの現象がありますとき、経験的事実を基にして、これらの現象の間に関係があるかどうかを考える。もし関係があるならば、いかなる関係にあるか、その間の関係の法則を発見しよ

うとする精神、そういうものを私は科学的精神と呼びたいのであります。」(小倉 1973 b) そして、「数学思想の中で最も科学的精神を表しているもの」「それが函数の観念です。」(小倉 1973 c) としている。

この説明から、「科学的精神」は算術では「函数の観念」であり、算数では「関数の考え」である、と理解できる。なぜならば、中島健三は小倉金之助の意思を受け継いでいるからである。そして「科学的精神」は、目的としては「法則を発見しようする」という「精神」である。つまり「法則を発見する」ために「現象の間に関係があるかどうか、もしあるのならば、いかなる関係か」と考えようという「精神」である。「精神」とは「肉体」ではなく「心」であるから、やはり、「関数の考えの第一歩」とは、目的意識を持って「関係」を考えていこうという、事象に向かったときにはじめにある心の準備としての予見的な態度である。

次に、「関数の考えの第一歩」何によって始まるのか考える。

何らかの事象に向かったときにはじめにあるこの予見的態度は、当然のことであるが、何らかの事象に出会うことで起きる。すなわち、「関数の考えの第一歩」は、「とらえたい」「ものごと」との出会いによって始まる。「まだよくわからないものごとをとらえようとする」のであるから、興味・関心をもって「まだよくわからないものごと」に出会い、意欲的に「働きかけ」たときに「関数の考えの第一歩」が始まる。

その「働きかけ」とは意欲から表出する行為であるから、具体的には「問いをもつ」とか、「問いに気付く」といった行為である。すなわち、「依存関係に着目する」という「関数の考えの第一歩」という予見的態度が心に準備される前に、子どもが何らかの「ものごと」に出会い興味関心をもち意欲的に「問う」という行為があるということになる。「関数の考え」の規定の解釈でも指摘されていたように、ある何らかの「ものごと」に出会い、興味をもち、関心を高め、それ故に意欲的にその「ものごと」を「問う」子どもが先ずはいるということである。

逆に考えれば、子どもが何らかの「ものごと」に出会い、興味、関心をもち意欲的「問う」ことによって、「関数の考えの第一歩」に当たる「依存関係に着目」し『「とらえたい」という考えで立ち向かおうとする」予見的な「態度」が生じることになる。となると、子どもからの「問い」を生み出すことによって、予見的な「立ち向かう」態度を育てていこうということになる。

例えば、「どっちが〇〇なのかな。」「どのようにくらべるのか」と量の比較をしたり、そもそも「〇〇」とは何なのかと量の概念を求めたり、「ものごと」の事象の比較検討の方法やその概念の内容を「問う」行為が「関数の考えの第一歩」という態度を生む契機となる。

すなわち、「関数の考えの第一歩」は、「依存関係に着目しよう」という、法則の発見をめざした「科学的精神」という心の準備態としての「態度」であり、出会い、興味関心を持った何らかのある対象に対して、意欲的に「問う」という子どもの姿によって準備される「態度」である。

「関数の第一歩」は具体的には子どもに「問う」という行為によって準備される、となると、関数の学習を始めるときに、子どもの「問い」が生起する場面として、何をどう提示し出会いを演出するのが、教科書とそれを扱う教師の重要な役割となる。なぜならば、その出会った場面に子どもが主体的に「働きかけ」、興味・関心・意欲にもとづいて「問い」が生まれ、問題となることによって、「関数の考えの第一歩」である予見的な態度が生起するからである。ここでは、子どもの「問い」の発生が、予見的な態度「関数の考え」を生起するであろうという仮説を採る。逆に考えれば、「関数の考えの第一歩」を予見させる態度を起こすには、関数学習の始めに、子

どもからの「関数の考え」に繋がる「問い」を起こすことが、提示する教科書やそこでの教師の役割の中身となる。

それでは、関数学習のはじまりに、子どもが、興味をもち関心を高め、設定された状況に主体的にかかわり、「問い」を発するには、どのような状況が提示されればいいのであろうか。そして何が問われればいいのであろうか。はじめに提示する「もの」の質について、ここでは二つの事例からとらえてみる。問題が発生するであろう提示する「もの」の量や質である。提示する「もの」に「問題発生性」を備えるということになる。

関数の定義にもとづけば、「ともなうて変わる二つの変数 x 、 y があって、 x の値を決めると、それに対応する y の値がただ1つ決まるとき、 y は x の関数であるという。」というのであるから、はじめに「ともなうて変わる二つの変数 x 、 y があって」に当たる、変数 x 、 y の設定が提示するものの一つの質になる。いわゆる、従属変数 y と、それを決める独立変数 x に気付く、「変数気付き」という中島健三のいう第一の段階である。その第一の段階を「関数の考えの第一歩」として演出することになる。

そのためには、まずは、子どもが学習の始まりの場面に働きかけて見いだすのは、「わからない」「わきたい」「ものごと」の気付きである。それが、「自分のとらえようとする（まだよくわからない）」「ものごと」であり変数 y となる。さらに、関係付けていく既にわかっている或いはとらえやすい関係の深い「ものごと」の気付きである。それが変数 x となる。いわゆる従属変数となる興味ある「わからない」数量をとらえる段階である。第一の段階は、まず興味ある関心の高い「わからない」変量に気付き、その変量を問い、その変量が変数であることに気付き、そしてそれと依存する関係にあるもうひとつの「変数見つけ」へと進む段階である。

となると、関数学習をはじめる際の場面は、少なくとも二つ以上の変化する数量となる「ものごと」がある程度見える形で提示されることになる。二つ以上の変量がよく見えるか見えにくいかは別にして、変量が内在しているという質の提示物である。そこで、その提示物に子どもの興味関心が高まり、一つの変化する数量に働きかけ「そもそも（そのものごと）〇〇とは何か」とか「どっちのその「ものごと」の方が大きいのか」といった一人の子どもからの「問い」が生まれ、その「問い」が幾人かの子どもに共有されるという状況となればいいのである。つまり、提示物の質のねらいは、まずは「変量」を問う「問い」の生起である。

このように「何らかのことを知りたいために独立変数を想定する」教材や場面についての研究は、幾つか出始めている。例えば、熊谷光一の「装置を用いた関数の考えの実現を目指した」研究（熊谷 1999）や、清野辰彦の、発掘調査で見つかった「骨から身長を推測する」という「関連が深くとらえやすい事柄は何か」（清野 2020）などである。はじめに従属変数を「問い」「問題」とし、さらに次に「独立変数」を「問い」「問題」としていく「問い」の発生や生起の授業研究が不十分である。不十分であるから、はじめに変数を「問う」設定になっている教科書教材はほとんどない。今後の大きな研究課題である。

従属変数を「問い」「問題」とし、さらに「独立変数」を「問い」「問題」としていくプロセスを具現化する教科書はほとんどないのであるが、従属変数を「問い」「問題」とし、「独立変数」を「問い」「問題」としていく流れを扱うということ、教師が意図し、状況を工夫して設定すれば具現化できる教科書の教材とその場面は幾つかある。

例えば、一番ポピュラーな場面は「紙の枚数を数える」という6年生の「比例」の授業場面で

ある。この「多量の紙の枚数」という教材設定はすべての算数教科書に掲載されている一般的な教材である。多量の画用紙を提示して、「何枚あるか」という問題設定である。「何枚かあるか」を知るために、その多量の画用紙の枚数という数量を、重さや厚さなどに着目させ、依存させて考え、既習事項の「比例」という特殊な関数関係を用いて紙の枚数は何枚かの問題解決をするという流れである。

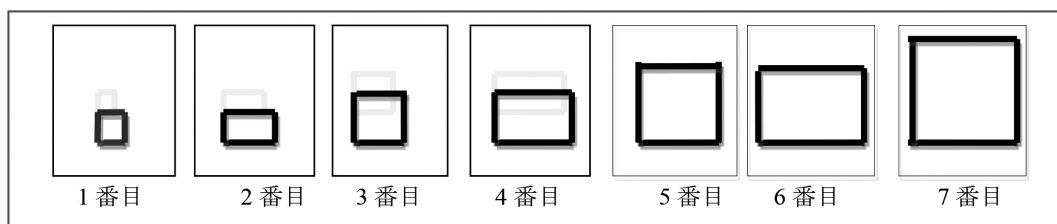
しかしながら、「たばの紙の枚数を求めるために、紙の枚数と重さの関係を調べましょう。」という問題がはじめから設定されているのである。「その紙のたば何枚あるのか」という子どもからの「問い」を求めないのである。これでは「関数の考えの第一歩」という授業の主題が台なしである。興味関心のある、問いたくなる数量があり、その数量を変数とみて、その数量と伴にある別の数量を同じように変数とみて関係付け、その依存関係のきまりを見いだし問題を解決していくという、「関数の考え」を育てる教材とその場面の扱い方へと工夫していきたい。

例えば、多量の画用紙をいきなり提示し「問い」の生起を意図する授業（橘小学校 2012）があった。多量の画用紙をじっくり見ていた子どもがすかさず「何枚あるんだ」と問うた。直ぐの「問い」の発生である。そこで、教師は一見変化しないように見える多量の画用紙をパラパラとその枚数を動かしてみせた。すると、枚数と伴に変化する他の数量に気づきはじめる。「だんだん紙の厚さが厚くなってくる。」とか、「紙のかたまりを直方体とみると体積が増えてくる」とか、「重くなってくる」という意見が出てくる。また「横の側面の表面積が広がっていく」という側面に注目した気づきも出てくる。さらに「側面を二つの直角三角形と見ると、その直角三角形の直角でない角度が段々大きくなっていく。」「じゃあ、こっちの直角でない角度は段々小さくなっていく。」という素晴らしい意見や、「音が段々高くなってくる」といった面白い意見も出てきた。提示した教材に内在している伴って変わるいくつかの変数に気付いていき、「依存関係に着目」する子どもたちであった。「問い」を生起させ、その解決に向けて教材に内在している「分かっている」「とらえやすい」数量に気付かせていくという教師の役割を学ぶことができる。

もうひとつの事例（世田谷小学校 2005）で、教材の「問題発生性」をとらえてみる。今度はいきなり「問い」は発生せず、いくつかの変数に気付きながら「問い」が発生するタイプの授業である。4年生の「長方形の面積」の授業である。はじめに黒い紙の上に、マッチ棒 4 本で作られた一辺マッチ棒 1 本の正方形を提示した。次に、マッチ棒 6 本で縦 1 本横 2 本に作られた長方形を提示した。さらに 3 番目にマッチ棒 8 本で一辺 2 本の正方形を提示した。その後も正方形、長方形、正方形と次ページの図のように正方形と長方形を交互に順番に、4 番目、5 番目、6 番目と、7 番目まで提示していった。

その順番の提示のなかで、子どもたちは、マッチ棒の本数だけでなく、高さや辺の長さ、そして広さなどを変化する数量として気付いていった。幾つもの変化する数量に気付いていく。

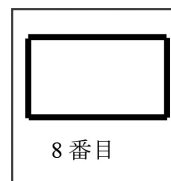
そして最後に、7 番目（一辺 4 本の正方形）のつぎに、8 番目として、マッチ棒縦 3 本横 5 本の長方形を提示したのである。8 番目は、縦 3 本、横 5 本の長方形である。縦の本数が 7 番目の正方形よりも 1 本低いのである。その代わり、横の本数は 5 本と 7 番目の正方形より 1 本多いのである。子どもたちは、今までの順番にあった、長方形と少し異なる点に気づきながらもじっと見ていた。やがて子どもたちは、7 番目と 8 番目に働きかけはじめた。



「8番目は、6番目の長方形をマッチ一本分横に伸ばした長方形だ。」

「7番面と同じ大きさ?」「同じ大きさ?」「大きさじゃなく広さだろ。」

子どもたちは、マッチ棒4本が一边の正方形である7番目と、縦3本横5本の長方形である8番目を見比べながら語り始めた。その後、多くの子どもたちに、ある共通した「気づき」が生まれた。7番目と8番目「広さは同じだ。」という気づきだ。「なぜか」というと、マッチ本数が両方とも16本で同じだから」という意見が出され、多くの子どもの納得を得る、ある意味、筋道立てた意見である。



その納得が広がったそのときである。「あれ、本当かな。7番目の正方形の方が広く見える。」という対立意見も出された。「いや、やはり7番目と8番目の広さは同じだよ。」「え? どちらが広いのか。」「問い」の発生である。そこで「どちらが広いのか」という「問題」が生まれた。変化を見せていくということからの「問い」の発生が起きた授業である。

その後、どちらが広いかという問題は、広さを決めるマッチ一本を一边とする小さな正方形の個数、つまり1番目の正方形に依存させることにより問題は解決されていく。その結果「広さ」とは、辺のまわりの広さではなく、中身に詰まった部分が広さであることや、その広さは小さな正方形のいくつ分で決まることが理解されていった。つまり小さな正方形、ここではマッチ棒1辺の1番目の正方形の幾つ分という、かけ算式で表現されることがわかっていった。その結果、「広さ」とは、その小さな正方形のいくつ分というかけ算の答え「積」で決まることが気付いていった。そして「広さ」のことを、算数では「面」の「積」と呼ぶことに気付いたのである。

このように、変化を見せることによって「問い」を生む方法もある。また、紙の枚数のような、一見変化しないものに「問い」を生み他の変数に気付かせていく方法もある。いすれにしても、子どもから「問い」を生み、「変数を見つけ、変数どうしの一意対応の関係のきまりを見つけ、活用していく」プロセスをあらかじめ予想する「予見」を生むための、ものごとの「数量」の意味やその数量の比較を問う「問い」が生起する、教材とその場面提示の開発が求められる。「関数の考え」という予見的な態度を生むための、子どもの「問い」が生まれる「教材」とその提示の仕方が、研究課題である。

歴史的に受け継がれてきた「関数観念」と、現在も益々重要になってきている「関数の考え」の理論を踏まえた「変化と関係」を扱う算数授業を、子どもたちと共に今後も活性化していきたい。そのためにも、小倉金之助の言葉を借りれば「もっと強い人間になって、できる限りの実効性を持った人間」として、今後も「関数の考え」を育てるための実効性のある教育理論と子どもたちからの「学び」を研究し続けていきたい。

[引用文献]

- 阿部博行 (1992) 小倉金之助 生涯とその時代 法政大学出版局 p.295
- 伊藤崇達 (2016) 自ら学び考える子どもを育てる教育方法と技術 自己調整学習研究会監修
岡田 涼・中谷素之・伊藤崇達・塚野州一編著 北大路書房 p.3
- 権平健一郎・神原武志 (1982) 関数とは何か 直観で探る関数の世界 講談社 p.187
- ヘルマン・ワイル (Hermann Weyl 1949) 1959年 菅原正夫・下村寅太郎・森 繁雄訳
数学と自然科学の哲学 岩波書店 p.9
- 梶井芳明 (2017) あなたと創る教育心理学 新しい教育課題にどう応えるか
羽野ゆつ子・倉盛美穂子・梶井芳明編 ナカニシヤ出版 p.150
- 小山正孝 (2000) 関数観念 算数数学重要用語3000の基礎知識 中原忠男編 明治図書
- 熊谷光一 (1999) 装置を用いた関数の考えの実現を目指した授業構成に関する覚書き
リアリティの観点から 上越数学教育研究 第14号 pp.1-10
- M. クライン (1976) 監訳：柴田録治 数学教育現代化の失敗 ジョニーはなぜたし算ができないのか
黎明書房 p.249
- 松宮哲夫 (2007 a) 伝説の算数教科書〈緑表紙〉塩野直道が考えたこと 岩波書店 p.50
- 松宮哲夫 (2007 b) 伝説の算数教科書〈緑表紙〉塩野直道が考えたこと 岩波書店 p.47
- 文部省 (1969) 小学校指導書 算数編 大阪書籍 p.34
- 文部省 (1946 a) 新教育指針第二分冊第一部前編 新日本建設の根本問題 p.32
- 文部省 (1946 b) 新教育指針第二分冊第一部前編 新日本建設の根本問題 p.30
- 文部省 (1973 a) 小学校算数指導資料 関数の考えの指導 東京書籍 p.7
- 文部省 (1973 b) 小学校算数指導資料 関数の考えの指導 東京書籍 p.8
- 文部省 (1989) 平成元年6月 小学校指導書算数編 東洋館出版社 p.56
- 文部科学省 (2018) 小学校学習指導要領 (平成29年告示) 解説 算数編 p.1
- 鍋島信太郎 (1952 a) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.32
- 鍋島信太郎 (1952 b) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.33
- 鍋島信太郎 (1952 c) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.34
- 鍋島信太郎 (1952 d) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.26
- 鍋島信太郎 (1952 e) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.9
- 鍋島信太郎 (1952 f) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.13
- 鍋島信太郎 (1952 g) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.14
- 鍋島信太郎 (1952 h) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.11
- 鍋島信太郎 (1952 i) 数学教育思潮 (近代編) 数学教育講座第2巻 基礎項目 p.12
- 中島健三 (1997 a) 算数教育50年 進展の軌跡 東洋館出版社 p.9
- 中島健三 (1997 b) 算数教育50年 進展の軌跡 東洋館出版社 p.12
- 中島健三 (1997 c) 算数教育50年 進展の軌跡 東洋館出版社 p.10
- 中島健三 (1997 d) 算数教育50年 進展の軌跡 東洋館出版社 p.15
- 中島健三 (1997 e) 算数教育50年 進展の軌跡 東洋館出版社 p.147
- 中島健三 (1981 a) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 p.181
- 中島健三 (1981 b) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 p.179
- 中島健三 (1981 c) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 まえがき p. ii
- 中島健三 (1981 d) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 p.173
- 中島健三 (1981 e) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 p.180
- 中島健三 (1981 f) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 p.174
- 中島健三 (1981 g) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 p.47
- 中島匠一 (2012) 集合・写像・論理 数学の基礎を学ぶ 共立出版 p.102

- 中村幸四郎 (1953 a) 数学教育の基礎にある二、三の問題 数学教育講座第3巻
基礎項目 吉野書房 p.4
- 中村幸四郎 (1953 b) 数学教育の基礎にある二、三の問題 数学教育講座第3巻
基礎項目 吉野書房 p.6
- 中村幸四郎 (1953 c) 数学教育の基礎にある二、三の問題 数学教育講座第3巻
基礎項目 吉野書房 p.5
- 野地清學・高井彌吉 (1918 a) 尺度とコンパスにて解説し得る新主義算術 明治出版協會 p.7
- 野地清學・高井彌吉 (1918 b) 尺度とコンパスにて解説し得る新主義算術 明治出版協會 p.9
- 小倉金之助 (1937) 科学的精神と数学教育 数学教育の改造問題 岩波書店 p.199
国立国会図書館デジタルコレクション
- 小倉金之助 (1938) 数学教育の歴史的基礎 数学教育の科学的基礎1 師範大學講座
数学教育第一巻 建文館 p.28
- 小倉金之助 (1973 a) 数学教育の根本問題 小倉金之助著作集第四巻第二篇
数学の本質 勁草書房 pp.112-113
- 小倉金之助 (1973 b) 数学教育の根本問題 小倉金之助著作集第四巻
数学教育改造の基調 特に小学校を中心として
第3 数学教育の意義とその問題 勁草書房 p.230
- 小倉金之助 (1973 c) 数学教育の根本問題 小倉金之助著作集第四巻
数学教育改造の基調 特に小学校を中心として
第3 数学教育の意義とその問題 勁草書房 pp.239-240
- 岡 隆 (2001) 態度と行動の一貫性実験 態度 社会心理学キーワード 有斐閣 p.26
- 岡本 久・長岡亮介 (2014 a) 関数とは何か 近代数学史からのアプローチ 近代科学社 p.4
- 岡本 久・長岡亮介 (2014 b) 関数とは何か 近代数学史からのアプローチ 近代科学社 p.3
- 大下卓司 (2011) イギリスにおける数学教育改造運動：数学教育におけるジョン・ペリーの
位置に着目して 京都大学大学院教育学研究科紀要 57： pp.435-448
- 大下卓司 (2018 a) 20世紀初頭のイギリスにおける数学教育改造運動 東洋館出版 p.37
- 大下卓司 (2018 b) 20世紀初頭のイギリスにおける数学教育改造運動 東洋館出版 p.36
- 大下卓司 (2018 c) 20世紀初頭のイギリスにおける数学教育改造運動 東洋館出版 p.46
- サロモン・ボホナー (Salomon Bochner 1965) 1970年 村田全 訳
科学史における数学 みすず書房 p.164
- 佐藤良一郎 (1928) 算術教育新論 東洋圖書株式会社 p.8
- 清野辰彦 (2020) 関数の考えを重視した比例の指導 算数授業研究 127 東洋館出版 p.10
- 鈴木正毅 (1957) 算数教材研究講座4 表・グラフ・統計 金子書房 p.226
- 高瀬正仁 (2009) オイラーの無限解析 レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) 無限解析序説の訳
本 海鳴社 p.2
- 玉置光一 (1929) 作為労作による数学教育の改造と其実際 啓文舎社書店 p.458
- 竹村和久 (2018) 態度 日本社会心理学会編 社会心理学事典 丸善 p.83
- 竹村和久 (2017) 態度と社会的影響 社会心理学 人と社会との相互作用の探求
堀毛一也・竹村和久・小川一美共著 培風館 p.143
- 戸田 清 (1953 a) 数学教育思潮 (現代編) 数学教育講座第5巻 基礎項目 吉野書房 p.48
- 戸田 清 (1953 b) 数学教育思潮 (現代編) 数学教育講座第5巻 基礎項目 吉野書房 p.47
- 遠山 啓 (1980) 数学教育の現代化 太郎次郎社 p.91
- 上垣 亘 (1998) 数学養育改造運動の日本的受容 三重大学教育学研究紀要 49： pp.49-72
- 和田義信 (1952 a) 数学教育概論 I 数学教育講座第1巻 基礎項目 吉野書房 p.8
- 和田義信 (1952 b) 数学教育概論 I 数学教育講座第1巻 基礎項目 吉野書房 p.9

- 和田義信（1952 c）数学教育概論Ⅰ 数学教育講座第1巻 基礎項目 吉野書房 pp.12-20
- 和田義信（1952 d）数学教育概論Ⅰ 数学教育講座第1巻 基礎項目 吉野書房 p.20
- 和田義信（1952 e）数学教育概論Ⅰ 数学教育講座第1巻 基礎項目 吉野書房 p.21
- 矢野健太郎（1968）矢野健太郎編 数学小辞典 共立出版 p.83
- 吉田 弘（1923）プロジェクトメソッドによる算術教授の實際 明治圖書株式会社 p.41

[引用算数授業記録]

- 世田谷小学校（2005）東京学芸大学附属世田谷小学校4年2組 平成17年11月18日5校時
- 橘小学校（2012）常葉大学教育学部附属橘小学校6年2組 平成24年10月30日4校時