氏　　　　　名	柴田　和樹
学位の種類	博士（理学）
報告番号	甲第３９４号
学位授与年月日	２０１５年3月３１日
学位授与の要件	学位規則(昭和２８年４月１日文部省令第９号) 第４条第１項該当
学位論文題目	Toric Rings and Toric Ideals Arising from Various Configurations （様々な配置に付随するトーリック環とトーリックイデアル）
審査委員	（主査）野呂　正行 横山　和弘 佐藤　文広 筧　三郎 大杉　英史（関西学院大学理工学部数理科学科教授）

Ｉ．論文の構成と内容要旨

トーリック環とトーリックイデアルは可換環論の中心課題の１つであり，特に，組合せ論から導かれる対象に関しては，組合せ論的性質と代数的性質が相互に関係付けられ，非常に美しい理論が展開される。また，トーリックイデアルの研究においては，グレブナー基底と呼ばれる計算論的に有用な性質を有する特別な生成系が，二つの世界を往来する道具として重要な役割を果たす。グレブナー基底理論を適用することにより，凸多面体の三角形分割，整数計画など様々な分野に可換環論を応用することができる。

本学位論文において，申請者は組合せ論から導かれる，ある対象の代数的構造の環論的性質の特徴付けを行った。具体的には，組合せ論的対象として，グラフおよびマトロイドを扱い，それらに付随する

- トーリック環の強コスツル性の特徴付け
- トーリックイデアルの２次生成（すなわち，２次２項式により生成されること）の特徴付け，２次グレブナー基底（すなわち，２次の２項式からなるグレブナー基底）の構成

に成功している。前者は第２章において扱われ，グラフの切断から導出される切断イデアルのグレブナー基底と，切断イデアルによる剰余類環であるトーリック環の環論的性質である強コスツル性のグラフの持つ性質による特徴付けを行った。これらの結果を掲載した単著論文は，雑誌 Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli に受理されている。後者は第３章において扱われ，マトロイドを対象とし，それに付随するトーリックイデアルが２次生成であることを元のマトロイドの性質で特徴付けている。これらの結果を掲載した単著論文は arXiv で公表され，現在，雑誌に投稿中である。

本論文の概要は次の通りである。まず，第１章では準備として，可換環論の重要な概念と，有用な道具となるグレブナー基底，そして本論文のターゲットである，可換環論側のトーリック環とトーリックイデアル，組合せ論側のグラフとマトロイドを説明している。この後で，前述したように，第２章では，グラフの切断イデアルとそのトーリック環を扱い，第３章では，マトロイドに付随するトーリックイデアルを扱っている。

以下において，第２章，第３章の内容をもう少し詳しく述べる。

まず，第２章では切断イデアルのグレブナー基底，および，トーリック環の強コスツル性について論述している。トーリック環のコスツル性は計算可換代数で研究されている重要なテーマの１つである。トーリックイデアルが２次生成であることはトーリック環がコスツルであることの必要条件であり，トーリックイデアルの２次グレブナー基底の存在はトーリック環がコスツルであることの十分条件であることが知られている。しかし，いずれも必要十分ではなく，

そのため，コスツル性について様々な追加条件が検討され，本論文で扱っている強コスツル性もその１つである。（強コスツルであることはコスツルであることの十分条件であるが，必要条件ではない。）近年では，あるトーリック環のクラスを考え，強コスツルとなるための必要十分条件を記述する結果がいくつか存在するが，そのほとんどが多項式環からセグレ積，テンソル積の操作を繰り返して得られるような自明なものに過ぎない。一方で，グラフの切断イデアルは Sturmfels-Sullivant によって定義された概念であり，切断イデアル，および，そのトーリック環の環論的性質とグラフの組合せ論的構造を関連付ける多くの研究結果が知られている。その中に「あるグラフの切断イデアルが２次生成であることと，グラフが４次の完全グラフをマイナーに持たないことは同値である」という結果が存在する。しかし，切断イデアルについては生成系の次数についての結果のみで，いつ切断イデアルが２次グレブナー基底を持つのか，非自明なものはほとんど知られていなかった。実際，非自明な例としてはリンググラフ（木，および，サイクルを頂点もしくは辺で張り合わせたグラフ）について２次グレブナー基底を構成した結果のみである。この点に関して，申請者は，切断イデアルが２次グレブナー基底を持つことの十分条件，および，トーリック環が強コスツルであることの必要十分条件をグラフのマイナーの言葉で表現することに成功した。この結果は非自明な強コスツルトーリック環を数多く含んでおり，その点でも非常に画期的である。

３章では，マトロイドに付随するトーリックイデアルのグレブナー基底について論述している。マトロイドのトーリックイデアルに関する有名な未解決問題として，１９８０年に White によって提唱された予想「マトロイドに付随するトーリックイデアルは２次生成である」がある。（厳密にいうと，White の予想は実際にはもう少し強い主張である。）この予想が成立するマトロイドとしては，「一様マトロイド」，「階数３以下のマトロイド」，「グラフィックマトロイド」などの一部のクラスが知られているにすぎない。申請者は，これらのマトロイド以外に対しても，この予想が成り立つ，より広いマトロイドのクラスを考察している。そこでは，マトロイド理論で使用されるマトロイドに対する様々な操作の中で「series-parallel connection」，「2-sum」などの２つのマトロイドを組合せる操作を取り上げ，これらの操作において，「２つのマトロイドを組合せたときに，トーリックイデアルの生成系や，グレブナー基底の性質が保持されるか否か」を検証し，その結果，「与えられた２つのマトロイドにおいて，トーリックイデアルが２次生成，あるいは，２次グレブナー基底を持つならば，series-parallel connection，2-sum で組合せたマトロイドのトーリックイデアルも同じ性質を持つこと」の証明に成功した。この結果を用いることで，例えば，予想解決のためには３連結マトロイドを考えれば十分であることなどが示されており，White 予想解決に向けて多大な貢献をしている。

Ⅱ．審査結果の要旨

申請者は組合せ論の対象から導かれる代数的構造の環論的性質を特徴付けることに成功している。そこでは，組合せ論的対象として，グラフおよびマトロイドを扱い，それらに対応する可換環的対象の強コスツル性やイデアルの２次生成性の特徴付け，２次グレブナー基底の構成などを行っている。

本研究に対して，１．問題の重要性，２．結果の新規性・発展性，３．結果にいたる理論展開の新規性・有用性，の３点について審査を行い，それぞれについて，高い評価が得られた。

１．問題の重要性：申請者の第１の問題として扱った切断イデアルの２次生成性，２次グレブナー基底の構成と，そのトーリック環の強コスツル性の問題は，計算可換代数で研究されている主要テーマの１つである。グラフから導出される切断イデアルとそのトーリック環に限定した形であるが，グラフの性質による特徴付けは，Sturmfels-Sullivant の予想「グラフの切断イデアルのトーリック環が正規であるための必要十分条件は，グラフが K_5 マイナーを持たないことである」の解決のための第１歩とも位置づけられる。また，第２の成果である，マトロイドに付随するトーリックイデアルの２次生成性の問題は，White による未解決予想「すべてのマトロイドに対して，そのトーリックイデアルは 2 次生成である」への重要なステップとなるものである。以上により，申請者の扱った問題は可換環（可換代数）論上重要なテーマであり，その意義は高いものと判断される。

２．結果の新規性・発展性：申請者の第１の成果では，グラフの切断から導出される切断イデアルとそのトーリック環を考察し，あるクラスの切断イデアルに対して，２次グレブナー基底を構成することによって，そのトーリック環が強コスツルであることを元のグラフの性質によって特徴付けている。切断イデアルは Sturmfels-Sullivant により導入された概念であり，代数的統計学において，グラフにより定義される統計モデルを解析するために有用である。与えられた（有限かつ無向）グラフ G に対して，G の切断イデアル I_G とは，G の２つの部分への分割の「情報」を，それらを変数 q として割り当てた多項式環 K[q] のイデアルに変換したものであり，剰余類環 $R_G=K[q]/I_G$ が I_G に随伴するトーリック環と呼ばれるものである。（ここで K は体とする。）I_G と R_G の環論的性質の G の性質による以下の特徴付けが，申請者の得た重要な結果である。

・ G が (K_4,C_5)-minor を持たなければ, I_G は２次グレブナー基底を持つ。（系 2-3-4）
・ G が (K_4,C_5)-minor を持たないことと, R_G が強コスツルであることは同値である。（定理 2-4-3）

本結果は，中心課題である２次グレブナー基底の存在とトーリック環の強コスツル性を，グラフの性質により極めて明快に特徴付けており，正規性に関する Sturmfels-Sullivant 予想の解決への有効なステップであると評価できる。また, ２次グレブナー基底の存在については，具体的なグレブナー基底の構成に成功しており、その計算を通じて種々の応用も期待できる。例えば，切断イデアルのグレブナー基底については,「四色問題」への別解法の道が指摘されている。

第２の成果は，マトロイドに付随するトーリックイデアルを考察し，トーリックイデアルの２次生成性を，元のマトロイドの性質により特徴付けたことである。 マトロイドは Whitney により導入されて以来, 様々な分野で応用されている概念で，ベクトル空間の基底の概念を一般化したものとも考えられる。マトロイド M が与えられたとき，M の基底に対応する無平方な単項式により生成されるトーリック環（半群環）R_M が定義される。さらに，各基底に対する単項式らが満たす代数関係式全体の集合として M のトーリックイデアル J_M が得られる。前述した White による予想に加えて, 近年では J_M が２次グレブナー基底を持つかどうかという問題も生まれ, これらに向けて種々の研究がなされている。申請者は，「J_M が２次生成される」マトロイドのクラス M_Q と，さらに強い性質である「J_M が２次グレブナー基底を持つ」マトロイドのクラス M_{GQ} を詳細に調べ，次の２つの重要な結果を得ている。
・ M_Q, M_{GQ} はいくつかのマトロイドの操作に関して閉じている（系 3-3-2 ）
・ J_M が２次グレブナー基底を持つための, M の満たす十分条件（定理 3-3-4）

これらの結果は，第１の結果同様，M の性質による非常に明快な特徴付けとなっており，White による予想の解決への重要なステップになるものと評価できる。

３．最後に，結果にいたる理論展開の新規性・有用性について評価できる点を指摘したい。第１の成果は，次のような方針で証明されている。

最初に, グラフ理論におけるグラフへの操作として，対応するトーリック環が環論的性質を保存する操作となる「縮約」や「クリーク和」などの性質を明らかにし，次に，それらと既存の結果を有効に利用して，所定の性質を持つグラフの分類を行い，最終的に残った特定のグラフに対して具体的にグレブナー基底を構成することで分類を完成させて最終的な結果を導いている。ここでの環論的性質を保持する操作の導入は，今後の研究進展に非常に有効なツールを提供することとなり，さらには，具体的なグレブナー基底の構成は，計算応用面

での貢献が期待できる。第２の成果の導出も第１の成果と同様の方針で証明されている。そこでは，まず，マトロイド理論におけるマトロイドへの操作として，対応するトーリック環が環論的性質を保存する新たな操作を導入し，次に，それらと既存の結果を有効に利用して，所定の性質を持つマトロイドの分類を行い，最終的に残った特定のマトロイドに対して具体的にトーリックイデアルのグレブナー基底を構成することで，分類を完成させ最終結果を導いている。ここでの新たな操作は第１の成果同様に今後の研究の進展のためのツールとなるものであり，十分に評価すべきものと考える。

以上のように，本研究は可換環論，より詳細には組合せ論的可換環論における新しく非常に有用な結果を与えるものであり，申請者の研究者としての能力を十分に示したものである。

2014 年 12 月 20 日(土) 13 時 30 分より 14 時 30 分まで，本論文についての公聴会を開き，論文内容の説明と質疑応答を行った。申請者は論文について明確に説明し，質疑にも適切に対応した。