

氏名	石原侑樹
学位の種類	博士(理学)
報告番号	甲第561号
学位授与年月日	2021年3月31日
学位授与の要件	学位規則(昭和28年4月1日 文部省令第9号) 第4条第1項該当
学位論文題目	Double Ideal Quotient and Effective Localization (二重イデアル商と効果的な局所化)
審査委員	(主査) 野呂 正行 (立教大学大学院理学研究科教授) 安田 雅哉 (立教大学大学院理学研究科准教授) 横山 和弘 (立教大学大学院理学研究科教授) 佐藤 洋祐 (東京理科大学理学部第一部 応用数 学科教授)

I. 論文の内容の要旨

(1) 論文の構成

本論文は、計算可換環論で最も重要なテーマの一つである多項式イデアルの準素成分計算に関して、それを直接計算する「効果的な局所化」について、新たなアプローチと具体的なアルゴリズムを提案している。重要な概念として「二重イデアル商」を導入し、二重イデアル商とその変形の詳細な理論を独自に展開し、完全な準素イデアル分解を必要としないで、準素成分を高速に計算できる独創的なアルゴリズム **Local Primary Algorithm** の構築に成功している。

論文は次のように構成されている。

第1章は準備として、可換環論の重要な概念と本論文のターゲットである局所化、準素イデアル分解、イデアル商などのイデアル基本操作を説明し、そしてそれらを実際に計算するために必要となる基本的な計算アルゴリズムを説明している。第2章では、本学位論文の主題である二重イデアル商とその変形の基本理論を展開し、第3章では二重イデアル商を用いた素因子判定法、準素成分判定法を与えている。第4章では、準素成分の具体的な生成法を導出している。第5章では、有理数上の二重イデアル商計算の効率化のために、モジュラー技法を導入している。第6章では、3章～5章で提案したアルゴリズムの有効性やその特性を計算機実験により検証している。

(2) 論文の内容要旨

計算可換環論の中で、多項式イデアルの種々の操作の実現は重要なテーマであり、中でも準素イデアル分解や準素成分の計算は、多くの基本的イデアル操作を組み上げて構成されるもので、最も重要なテーマの一つに数えられる。本論文では、準素成分の直接計算（「効果的な局所化」と呼ぶ）に焦点をあて、新たな手法と効率的な計算アルゴリズムの構築に成功している。

本論文の一つ目の成果は、従来の素因子判定や準素成分計算法の理論を拡充し、素因子のより詳細な判定法（孤立・埋没）や準素成分の直接判定法、さらには、準素成分の効率的な構成法の導出に成功したことである。ここでの鍵は、「二重イデアル商」の導入であり、二重イデアル商（とその変形）の詳細な理論を展開し、それらを使った「生成」法と「判定」法を構築したことにある。つまり、与えられたイデアル操作に対し、まずその結果の候補を生成し、その後その候補が本当に正しい結果であるかを判定法を用いて調べる手法である。この生成と判定に分けた手法のメリットとして次の2点が挙げられる。

(1)複雑な計算を簡単なステップに分けることができる。

(2)生成は候補でよいから、自由度の高い手法となり高速化が期待できる。

本論文では、いくつかの効率的計算法を組み合わせ、**Local Primary Algorithm** という特定の準素成分だけを計算する「効果的局所化」の計算法を構築している。さらに、これらの新たな手法と具体的なアルゴリズムについて、その効果・有効性を計算機実験により検証している。

本論文の二つ目の成果は、有理数体上のイデアルに対する効率化としてモジュラー技法を用いた（二重）イデアル商やその変形（飽和イデアル）の生成法と判定法を構築し、実際の計算機上でその効果を検証したことである。モジュラー技法とは、有理数上の計算を、有限体上の計算を利用して行うもので、中間係数膨張などの問題を解決することができる手法である。より正確には、(1)最初に有理数体上で行いたい計算を複数の異なる有限体上で並列に計算し、(2)次にそれらを中国人剰余定理(CRT)と有限体の元を有理数に変換する **rational reconstruction** で有理数体上のものに構成し、(3)最後にその構成した結果が本当に正しいかどうかを判定法により確かめる、という計算技法である。本論文では、二重イデアル商計算に効果的にモジュラー技法が適用できるように、理論を新しく構築し、計算機実験によりその有効性を確かめている。

II. 論文審査の結果の要旨

(1) 論文の特徴

本論文は、計算可換環論で最も重要なテーマの一つである多項式イデアルの準素成分計算に関して、それを直接計算する「効果的な局所化」について、新たなアプローチと具体的なアルゴリズムを提案した。鍵となる重要な概念として「二重イデアル商」を導入し、従来の素因子判定や準素成分計算法の理論を拡充し、素因子のより詳細な判定法（孤立・埋没）や準素成分の直接判定法、さらには、準素成分の効率的な構成法の導出に成功した。この生成と判定に分けた手法により、いくつかの効率的計算法を組み合わせ、**Local Primary Algorithm** という準素成分を直接計算する効率的アルゴリズムの構築を行なった。さらに、これらの新たな手法と具体的なアルゴリズムについて、その効果・有効性を計算機実験により検証した。さらなる改良として、有理数体上のイデアル商・二重イデアル商等の計算において、モジュラー技法を適用し、その効果を計算機実験で検証した。

(2) 論文の評価

本論文は、計算可換環論で最も重要なテーマの一つである多項式イデアルの準素成分計算に関して、それを直接計算する「効果的な局所化」について、従来の手法を発展させた新たなアプローチと具体的なアルゴリズムを提案し、大きな進歩を与えた。鍵となる概念である「二重イデアル商」とその変形を深く解析したことで、新たな理論を生み出し、素因子のより詳細な判定法（孤立・埋没）や準素成分の直接判定法、さらには、準素成分の効率的な構成法の導出に成功した。この生成と判定に分けた手法により、いくつかの効率的計算法を組み合わせ、**Local Primary Algorithm** という準素成分を直接計算する効率的アルゴリズムの枠組みが明確になった。この枠組みは、素因子や準素成分の候補の正当性を判定できるもので、構成法の自由度を上げることを可能にし、さらなる発展が期待できる枠組みである。さらに、これらの新たな手法と具体的なアルゴリズムについて、種々の改良も提案し、モジュラー技法の適用まで行なうて、提案するアルゴリズムの効果・有効性を計算機実験により検証している点も評価できる。

以上の評価より、従来のイデアル商・飽和イデアル計算の理論を大幅に拡充し、準素成分の直接計算に新たな手法を与えたということで、博士学位論文審査委員会は、本論文は博士論文の価値があると判断する。