

立教大学数理物理学研究センター

Lecture Note Volume 1

## 離散曲線のダイナミクスと離散可積分系

梶原健司 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所) 述

三谷浩将 (立教大学大学院)・笈三郎 (立教大学) 記

2013年2月

# はじめに

このノートは、2012年9月11日～14日に立教大学で行われた集中講義の記録です。テーマである「可積分幾何」は近年盛んに研究されている分野であり、数理物理学の研究から生まれた「可積分系」という分野と、微分幾何学との境界領域に位置するものです。「可積分幾何」の中にもさまざまな研究方向がありますが、その中の1つとして、可積分系の離散化で培われた手法を用いて微分幾何学の離散化を行うという「離散微分幾何」があり、離散的なオブジェクトの幾何学的整合性を記述するための新しい数学的枠組みとして注目されています。

「可積分幾何」に関して、最近では [1, 6, 7, 29] 等の成書も出版されていますが、この分野を学び始めようとする初学者にとっては、可積分系の理論と曲線・曲面の微分幾何の双方の基礎を学ぶ必要があり、しかも話題も多岐にわたるため、どこから始めてよいのかわかり難いという声が少なくありません。

講演者である梶原健司先生は可積分系の専門家であり、最近では幾何学の専門家と共同研究を行い、興味深い結果を導きだしていらっしゃいます。梶原先生に集中講義、およびそれを元にレクチャーノートを作成することを依頼したところご快諾いただきました。そこで、講義に出席した大学院生の三谷浩将君が  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  で原稿を作成し、それに算が手を入れたのがこのノートです。本レクチャーノートに誤植があるなら、それは算・三谷によるものであることを、ここに注記しておきます。

梶原先生の講義では、平面曲線の微分幾何学的取り扱いからソリトン理論の具体的な計算技術の詳細まで、予備知識を仮定せずに丁寧に講義していただき、この分野に初めて触れる学生にとって(もちろん私にとっても) 良い機会となりました。さらに後半では、平面離散曲線の等周変形の明示公式 [8] という最新の結果までが解説されています。

本レクチャーノートが、「可積分幾何」に興味をお持ちの方々のお役に立つことを願います。

2013年2月

立教大学理学部数学科  
算 三郎

# 目次

第 1 章	平面曲線の等周変形と mKdV 方程式	1
1.1	空間曲線 . . . . .	1
1.2	平面曲線 . . . . .	3
第 2 章	可積分系の理論入門	7
2.1	KdV 方程式のソリトン解 . . . . .	7
2.2	KP 方程式とソリトン解 . . . . .	11
2.3	KdV 方程式, mKdV 方程式への簡約 (reduction) . . . . .	17
2.4	“Focusing” mKdV 方程式 . . . . .	21
第 3 章	平面曲線の明示公式	24
第 4 章	平面離散曲線の等周変形	27
4.1	離散平面曲線とは . . . . .	27
4.2	離散等周変形と離散 mKdV 方程式 . . . . .	28
4.3	離散 potential mKdV 方程式の連続極限 . . . . .	31
第 5 章	可積分系の離散化	33
5.1	微分方程式の離散化 . . . . .	33
5.2	2 次元戸田格子方程式の離散化 . . . . .	35
第 6 章	離散曲線の等周変形の明示公式	40

# 第1章 平面曲線の等周変形と mKdV 方程式

はじめに、以下で用いる記号をまとめておく。

- $n$  次元 Euclid 空間:  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$
- $\mathbf{R}^n$  の標準内積:  $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{q} = (y_1, \dots, y_n)$  に対し,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
- ベクトル  $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_n)$  の長さ:  $|\mathbf{p}| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}$
- 回転行列:  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

## 1.1 空間曲線

本節では、3次元空間内の曲線についての微分幾何学的取り扱いを復習しておこう [14, 28]。 $\mathbf{R}^3$  内の空間曲線が、

$$\begin{array}{ccc} \gamma: I & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \gamma(x) = \begin{bmatrix} X(x) \\ Y(x) \\ Z(x) \end{bmatrix} \end{array} \quad (1.1)$$

という形で媒介変数表示されているものとする。ただし、ベクトル値関数  $\gamma$  は適当な开区間  $I \in \mathbf{R}$  において  $C^\infty$  級であるとする。特に、媒介変数  $x$  が、ある点を基点とした弧長である場合は、 $x$  を弧長径数という (図 1.1)。以下では  $x$  は弧長径数であるとして、 $x$  に関する微分を“ $'$ ”で表す。

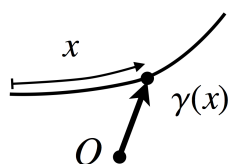


図 1.1: 弧長径数

このとき、 $dx = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2}$  であるので、

$$|\gamma'| = \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right| = \sqrt{\left( \frac{dX}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dY}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{dx} \right)^2} = 1$$

となる。よって、

$$T := \gamma' = \frac{d\gamma}{dx} \quad (1.2)$$

とおけば、 $x$  が弧長径数である場合には  $|T|^2 = \langle T, T \rangle = 1$  となり、 $T$  は単位接ベクトルとなる。

ここで  $\langle T, T \rangle = 1$  の両辺を  $x$  で微分すると,

$$\langle T', T \rangle + \langle T, T' \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\langle T, T' \rangle = 0 \quad (1.3)$$

となり,  $T$  と  $T'$  が直交していることがわかる. そこで, 単位法ベクトル  $N$  と陪法線ベクトル  $B$  を

$$N := \frac{T'}{|T'|}, \quad B := T \times N \quad (1.4)$$

で定める. 3つのベクトルの組  $\{T, N, B\}$  は, 曲線上の各点に付随した  $\mathbf{R}^3$  の正規直交基底である (図 1.2). また, 3つのベクトル  $T, N, B$  を組み合わせた 3次正方行列

$$\Phi := [T, N, B] \in SO(3; \mathbf{R}) \quad (1.5)$$

を Frenet 標構とよぶ.

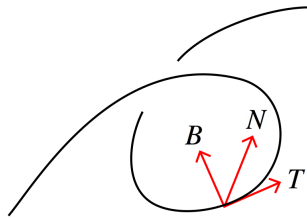


図 1.2: Frenet 標構

$T, N, B$  は線形独立なので, それぞれの一階微分  $T', N', B'$  はそれらの線形結合でかける. まず, 単位法ベクトル  $N$  は  $N = \frac{T'}{|T'|}$  と定めたので,  $\kappa = |T'|$  (曲線  $\gamma$  の曲率) とおけば,

$$T' = |T'|N = \kappa N \quad (1.6)$$

となる. 次に,  $\langle N, N \rangle = 1$  を  $x$  で微分すると  $\langle N, N' \rangle = 0$  となり,  $N$  と  $N'$  は直交していることが分かる. よって, 適当な  $\alpha, \beta$  により

$$N' = \alpha T + \beta B \quad (1.7)$$

とかける. 係数  $\alpha, \beta$  は, 次のように内積を用いて表すことができる.

$$\alpha = \langle N', T \rangle, \quad \beta = \langle N', B \rangle \quad (1.8)$$

ここで,  $\langle N, T \rangle = 0$  であることと, (1.6) とより,

$$\alpha = \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\kappa \langle N, N \rangle = -\kappa \quad (1.9)$$

が得られる. さらに,  $\lambda = \langle N', B \rangle$  によって捩率 (torsion) を定義すると<sup>1</sup>, (1.7), (1.8), (1.9) により,

$$N' = -\kappa T + \lambda B \quad (1.10)$$

が得られる.

<sup>1</sup>通常は捩率を “ $\tau$ ” で表すが, ここでは記号  $\tau$  は「タウ関数」を表す記号として使いたないので, 捩率には “ $\lambda$ ” を用いている.

$B'$  を求めるために, (1.4) の第 2 式の両辺を微分すると,

$$\begin{aligned} B' &= T' \times N + T \times N' = \kappa N \times N + T \times (-\kappa T + \lambda B) \\ &= \lambda T \times B = -\lambda N \end{aligned} \quad (1.11)$$

となる. ここで, ベクトル 3 重積の公式より,

$$T \times B = T \times (T \times N) = \langle T, N \rangle T - \langle T, T \rangle N = -N \quad (1.12)$$

であることを用いた. 以上により,  $T', N', B'$  を  $T, N, B$  の線形結合として表す式がすべて得られた.

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \lambda B, \quad B' = -\lambda N, \quad \kappa = |T'|, \quad \lambda = \langle N', B \rangle. \quad (1.13)$$

以上より, 次の公式が得られた.

定理 1.1 (Frenet-Serre の公式).

$$\Phi' = \Phi \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

## 1.2 平面曲線

次に平面内での曲線を考える [6, 7]. 前節に引き続き  $x$  を弧長径数とする. 开区間  $I \in \mathbf{R}$  に対して次のベクトル値関数を定義する.

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \cup &\quad \cup \\ x &\longmapsto \gamma(x) = \begin{bmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.15)$$

このとき

$$T := \frac{d\gamma}{dx} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

によって接ベクトル  $T$  を定義する ( $x$  は弧長径数であることから  $|T| = 1$  なので, (1.16) の形に表される).  $\theta(x)$  を角関数 (turning angle) という (図 1.3).

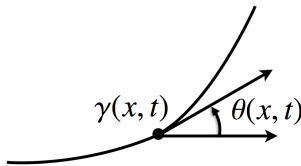


図 1.3: 角変数  $\theta(x, t)$

$T$  は単位接ベクトルなので,

$$\langle T, T \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \langle T, T' \rangle = 0 \quad (1.17)$$

であり,  $T$  と  $T'$  は垂直であることがわかる. そこで, 単位法ベクトルを

$$N := R\left(\frac{\pi}{2}\right) T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T \quad (1.18)$$

によって定めると,  $N$  は  $T'$  と平行であり,

$$T' = \kappa N = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} T \quad (1.19)$$

と表される. ここで,  $\kappa = |T'|$  は曲線  $\gamma$  の曲率である. 一方, (1.16) を  $x$  で微分すると,

$$T' = \begin{bmatrix} -\theta' \sin \theta \\ \theta' \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' \\ \theta' & 0 \end{bmatrix} T. \quad (1.20)$$

であるので, これを (1.19) と比較して,

$$\kappa = \theta' \quad (1.21)$$

を得る. 前節の空間曲線の場合と同様に Frenet 標構を

$$\Phi := [T, N] \in SO(2; \mathbf{R}) \quad (1.22)$$

によって定めれば, 平面曲線における Frenet の公式が得られる.

定理 1.2 (Frenet の公式).

$$\Phi' = \Phi U, \quad U := \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

次に, 与えられた曲線  $\gamma$  の時間発展問題について考えるために, 時間変数  $t$  を用いて  $\gamma = \gamma(x, t)$  と表す. ここで次の条件を考える.

定義 1.1 (等周条件). 等周条件 (isoperimetric condition) とは, すべての  $x, t$  に対して

$$|\gamma'(x, t)| = 1 \quad (1.24)$$

が成り立つことである.

この条件の下で曲線  $\gamma$  がどう変化するかを, Frenet 標構を用いて考える. 今,  $T$  と  $N$  は線形独立なので, 2つの関数  $f(x, t)$  と  $g(x, t)$  を用いて

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = g(x, t)T + f(x, t)N \quad (1.25)$$

とする. この式の両辺を  $x$  で偏微分すると<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma'}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} = g'T + gT' + f'N + fN' \\ &= g'T + g \cdot \kappa N + f'N + f \cdot (-\kappa T) \\ &= (g' - f\kappa)T + (f' + g\kappa)N. \end{aligned} \quad (1.26)$$

ところで  $\langle T, T \rangle = 1$  であるから, 両辺を  $t$  で偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle T, T \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial t}, T \right\rangle = 0 \quad (1.27)$$

であるので, (1.26) を代入すれば,

$$g' = f\kappa. \quad (1.28)$$

<sup>2</sup> $\partial/\partial x$  と  $\partial/\partial t$  とが交換可能であることを仮定している.

が得られる．よって

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (f' + g\kappa)N \quad (1.29)$$

であり，この  $\frac{\partial T}{\partial t}$  を  $90^\circ$  回転すれば

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -(f' + g\kappa)T \quad (1.30)$$

が得られる．以上より，曲線  $\gamma$  の時間発展に関する微分方程式を Frenet 標構で記述できたことになる．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi V, \quad V := \begin{bmatrix} 0 & -f' + g\kappa \\ f' + g\kappa & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし, } g' = f\kappa). \quad (1.31)$$

先ほどの Frenet の公式 (1.23) と，この (1.31) との両立条件を計算する．つまり

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (1.32)$$

を満たす条件を求める．

$$\text{左辺} = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi U) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \cdot U + \Phi \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \Phi V U + \Phi \cdot \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (1.33)$$

$$\text{右辺} = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi V) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cdot V + \Phi \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \Phi U V + \Phi \cdot \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (1.34)$$

したがって，両立条件は

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [V, U] = 0 \quad (1.35)$$

と表されるが， $U, V$  の具体的な形 (1.23), (1.31) を代入して計算すれば，

$$\kappa_t = f'' + g'\kappa + g\kappa' \quad (1.36)$$

となる．ここで  $g' = f\kappa$  なので

$$\kappa_t = f'' + f\kappa^2 + g\kappa' \quad (1.37)$$

が得られた． $g' = f\kappa$  を満たす  $f, g$  として，特に

$$f = -\kappa', \quad g = -\frac{\kappa^2}{2} \quad (1.38)$$

を採用すれば，(1.37) より modified KdV (mKdV) 方程式

$$\kappa_t + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_x + \kappa_{xxx} = 0 \quad (1.39)$$

が導かれる．さらに  $\kappa = \theta_x$  に注意すれば， $\theta = \theta(x, t)$  は potential mKdV 方程式

$$\theta_t + \frac{1}{2}(\theta_x)^3 + \theta_{xxx} = 0 \quad (1.40)$$

を満たすことが分かる．また，対応する  $U, V$  は次の形となる．

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\kappa_{xx} + \frac{\kappa^3}{2}\right) \\ \left(\kappa_{xx} + \frac{\kappa^3}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$



注 1.1. 上では, 線形連立偏微分方程式  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = U\Phi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = V\Phi$  の両立条件から, mKdV 方程式 (1.39) が得られることを示した.

線形連立偏微分方程式を勝手に与えると一般には解がないことを見るために, 次の例を考えよう.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xtf, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = t^2 f \quad (1.42)$$

第 1 式から

$$f = c(t)e^{\frac{x^2}{2}t} \quad (1.43)$$

が得られ, これを第 2 式に代入すると,

$$c_t + \left(\frac{x^2}{2} - t^2\right)c = 0 \quad (1.44)$$

となり,  $c = c(t)$  が  $t$  のみに依存する関数であることと矛盾する. すなわち, (1.42) には解がない.

しかし, (1.42) の第 2 式を  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{x^2}{2}f$  に置き換えて,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xtf, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{x^2}{2}f \quad (1.45)$$

を考えれば, 解は存在する. 実際, (1.44) を (1.45) の第 2 式に代入すると  $c_t = 0$  となるので,  $c$  が定数であれば連立偏微分方程式 (1.45) の解となることがわかる.

注 1.2. mKdV 方程式 (1.39) の解  $\kappa(x, t)$  と potential mKdV 方程式 (1.40) の解  $\theta(x, t)$  を用いて, 曲線  $\gamma(x, t)$  を記述できる.

$$\gamma(x, t) = \begin{bmatrix} \int_0^x \cos \theta(s, t) ds \\ \int_0^x \sin \theta(s, t) ds \end{bmatrix} + \gamma_0(t), \quad \theta(x, t) = \int_0^x \kappa(s, t) ds + \theta_0(t). \quad (1.46)$$

$\gamma_0(t)$  はさらに初期値  $\kappa(0, t)$ ,  $\theta(0, t)$ ,  $\kappa_x(0, t)$  を用いて次のように表せる.

$$\gamma_0(t) = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} X_0 = \int_0^t \left( -\frac{1}{2}\kappa^2(0, t) \cos \theta(0, t) + \kappa_x(0, t) \sin \theta(0, t) \right) dt + \xi_0, \\ Y_0 = \int_0^t \left( \frac{1}{2}\kappa^2(0, t) \cos \theta(0, t) - \kappa_x(0, t) \sin \theta(0, t) \right) dt + \eta_0. \end{cases} \quad (1.47)$$

(この公式は自明ではない.) 第 3 章で “ $\tau$  関数” (タウ関数) を用いた曲線の明示公式を紹介する.

## 第2章 可積分系の理論入門

### 2.1 KdV 方程式のソリトン解

非線形偏微分方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

を Korteweg-de Vries (KdV) 方程式,

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \quad (2.2)$$

を modified Korteweg-de Vries (mKdV) 方程式という。この二つの方程式に対して次の命題が成り立つ。

命題 2.1 (Miura 変換). 従属変数  $v$  が mKdV 方程式 (2.2) の解であるとき,

$$u = -v^2 - v_x \quad (2.3)$$

で定められる  $u$  は KdV 方程式 (2.1) の解である。この変換のことを Miura 変換という (R.M. Miura, 1967)。<sup>1</sup>

問 2.1. 命題 2.1 を示せ。

KdV 方程式の進行波解を求めてみよう。 $u(x, t) = U(X)$ ,  $X = x - ct$  ( $c$  は定数) とおいて KdV 方程式 (2.1) に代入すると,

$$\begin{aligned} & -cU' + 6UU' + U''' = 0 \\ \xrightarrow{\text{積分}} & -cU + 3U^2 + U'' = 0 \quad (\text{積分定数は } 0 \text{ とした。}) \\ \xrightarrow{\times U'} & -cUU' + 3U^2U' + U'U'' = 0 \\ \xrightarrow{\text{積分}} & -\frac{c}{2}U^2 + U^3 + \frac{1}{2}(U')^2 = 0 \quad (\text{積分定数は } 0 \text{ とした。}) \end{aligned}$$

これを  $U' = \frac{dU}{dX}$  について解くと,

$$\frac{dU}{dX} = \pm\sqrt{2}U\sqrt{-U + \frac{c}{2}} \quad (2.4)$$

という、変数分離型の方程式が得られる。ここでは“ $\pm$ ”の“ $+$ ”をとることにして,

$$f = \sqrt{-U + \frac{c}{2}} \quad (2.5)$$

とおけば,

$$\frac{df}{dX} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( f^2 - \frac{c}{2} \right) \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>Miura 変換発見の経緯については, [17] に Miura 氏自身による解説がある。

という形に変形される． $c > 0$  を仮定すると，

$$\frac{1}{f^2 - c/2} = \frac{1}{(f + \sqrt{c/2})(f - \sqrt{c/2})} = \frac{1}{\sqrt{2c}} \left( \frac{1}{f - \sqrt{c/2}} - \frac{1}{f + \sqrt{c/2}} \right) \quad (2.7)$$

により，(2.6) に用いれば，

$$\left( \frac{1}{f - \sqrt{c/2}} - \frac{1}{f + \sqrt{c/2}} \right) df = \sqrt{c} dX \quad (2.8)$$

となる．これを積分すると，

$$\log \left| \frac{f - \sqrt{c/2}}{f + \sqrt{c/2}} \right| = \sqrt{c} X + \delta \quad (\delta \text{ は積分定数})$$

が得られるが， $f - \sqrt{c/2} > 0$  を仮定して整理すれば，

$$f = \sqrt{\frac{c}{2}} \cdot \frac{1 - c\sqrt{c}X + \delta}{1 + c\sqrt{c}X + \delta} = \sqrt{\frac{c}{2}} \tanh \left( \frac{\sqrt{c} X + \delta}{2} \right) \quad (2.9)$$

となり，(2.5) とより

$$U = \frac{c}{2} - f^2 = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c} X + \delta}{2} \right) \quad (2.10)$$

が導かれる．ただし，

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \quad (2.11)$$

を用いた．こうして，KdV 方程式 (2.1) の孤立波解 (2.10) が求められた．

今求めた孤立波解 (2.10) は，次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned} u &= 2p^2 \operatorname{sech}^2 \{p(x - 4p^2 t + \delta)\} \quad \left( p = \frac{\sqrt{c}}{2} \text{ とおいた.} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{2\eta}) \quad (\eta = px - 4p^3 t + \eta_0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

問 2.2. (2.12) を確かめよ．

そこで，

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau \quad (2.13)$$

とおいて， $\tau = \tau(x, t)$  の満たす方程式を導いてみよう．(2.13) を (2.1) に代入すると

$$2[(\log \tau)_{xt} + 6\{(\log \tau)_{xx}\}^2 + (\log \tau)_{xxxx}]_x = 0 \quad (2.14)$$

と整理される．各項を計算していこう．

$$\begin{aligned} (\log \tau)_{xt} &= \left( \frac{\tau_x}{\tau} \right)_t = \frac{\tau_{xt}\tau - \tau_x\tau_t}{\tau^2}, \\ (\log \tau)_{xx} &= \frac{\tau_{xx}\tau - (\tau_x)^2}{\tau^2}, \\ (\log \tau)_{xxx} &= \frac{(\tau_{xxx}\tau + \tau_{xx}\tau_x - 2\tau_x\tau_{xx})\tau^2 - (\tau_{xx}\tau - (\tau_x)^2) \cdot 2\tau\tau_x}{\tau^4} \\ &= \frac{\tau_{xxx}\tau^2 - 3\tau_{xx}\tau_x\tau + 2(\tau_x)^3}{\tau^3}, \\ (\log \tau)_{xxxx} &= \frac{\tau_{xxxx} - 4\tau_{xxx}\tau^2 - 3(\tau_{xx})^2\tau^2 + 12\tau_{xx}(\tau_x)^2\tau - 6(\tau_x)^4}{\tau^4}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.14) を1回積分してから (積分定数は0とする), これらを代入すると,  $\tau$  に対する方程式として,

$$\tau_{xt}\tau - \tau_x\tau_t + \tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3(\tau_{xx})^2 = 0 \quad (2.16)$$

が得られる.

次のステップとして, (2.16) の厳密解を構成したい. ここでは, “摂動法” を用いる [2]. まず,  $\tau = 1$  が (2.16) の解であることは明らかであろう (KdV 方程式 (2.1) の  $u = 0$  という解に対応). ここで,

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (2.17)$$

という形を仮定して (2.16) に代入し,  $\varepsilon$  のべきで整理した後, 下から順に解いていく.

この計算を実行する際のツールとして, 次の “広田微分” を用いる:

$$D_x^n D_t^m f \cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^n (\partial_t - \partial_{t'})^m f(x, t) g(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}. \quad (2.18)$$

いくつかの例を挙げておく.

$$\begin{aligned} D_x f \cdot g &= f'g - fg', \\ D_x^2 f \cdot g &= f''g - 2f'g' + fg'', \\ D_x^3 f \cdot g &= f'''g - 3f''g' + 3f'g'' - fg''', \\ D_x^4 f \cdot g &= f''''g - 4f'''g' + 6f''g'' - 4f'g''' + fg'''', \\ D_x D_t f \cdot g &= f_{xt}g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt}. \end{aligned}$$

この記法を用いると,

$$\tau_{xt}\tau - \tau_x\tau_t + \tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3(\tau_{xx})^2 = \frac{1}{2}D_x D_t \tau \cdot \tau + \frac{1}{2}D_x^4 \tau \cdot \tau \quad (2.19)$$

であるので, (2.16) は

$$(D_x D_t + D_x^4) \tau \cdot \tau = 0 \quad (2.20)$$

という形にまとめられる. このような形の方程式を, Hirota の双線形方程式 (双線形形式) (bilinear equation (bilinear form)) という [2, 18, 26]. 特に, (2.20) が KdV 方程式の双線形形式である.

広田微分 (2.18) の性質をいくつかまとめておこう.

(1)  $F(X, T, \dots)$  を  $X, T, \dots$  の多項式,  $\alpha, \beta$  を定数として,

$$F(D_x, D_t, \dots)(\alpha f + \beta g) \cdot h = \alpha F(D_x, D_t, \dots) f \cdot h + \beta F(D_x, D_t, \dots) g \cdot h$$

(双線形性, 第2の引数についても同様)

$$(2) D_x^m D_t^n f \cdot g = (-1)^{m+n} D_x^m D_t^n g \cdot f$$

$$(3) D_x^m D_t^n f \cdot 1 = \partial_x^m \partial_t^n f$$

$$(4) D_x^m D_t^n (e^{p_1 x + q_1 t}) \cdot (e^{p_2 x + q_2 t}) = (p_1 - p_2)^m (q_1 - q_2)^n e^{(p_1 + p_2)x + (q_1 + q_2)t}$$

これらの性質を利用して, “摂動計算” を実行する. (2.17) を (2.20) に代入すると,

$$0 = (D_x D_t + D_x^4)(1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots)(1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots) \quad (2.21)$$

が得られる. これを  $\varepsilon$  の次数について整理して, 各次数の方程式を書き下ろしてみる.

$$O(\varepsilon^0) : 0 = (D_x D_t + D_x^4)1 = 0, \quad (2.22)$$

$$O(\varepsilon^1) : 0 = 2(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_1, \quad (2.23)$$

$$O(\varepsilon^2) : 0 = 2(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_2 + (D_x D_t + D_x^4) f_1 \cdot f_1, \quad (2.24)$$

$$O(\varepsilon^3) : 0 = 2(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_3 + 2(D_x D_t + D_x^4) f_1 \cdot f_2. \quad (2.25)$$

⋮

次数 0 の方程式 (2.22) は自明に成立していることを注意しておく .

### 1 ソリトン解

(2.23) を満たす  $f_1$  を探するために , まずは  $f_1 = e^{\eta_1}$  ,  $\eta_1 = p_1x + q_1t$  とおく . これを (2.23) に代入すると ,

$$(2.24) \quad \Rightarrow \quad p_1(q_1 + p_1^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -p_1^3 \quad (2.26)$$

とすべきなことが分かる . 引き続いて  $O(\varepsilon^2)$  の方程式 (2.24) より ,

$$(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_2 = -(D_x D_t + D_x^4) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_1} = 0 \quad (2.27)$$

となるので ,  $f_2 = 0$  とすればよい . さらに (2.25) は

$$2(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_3 = -2(D_x D_t + D_x^4) e^{\eta_1} \cdot 0 = 0 \quad (2.28)$$

となり ,  $f_3 = 0$  と取れる . 以下同様に ,  $f_4 = f_5 = \dots$  と取れることが分かる . よって

$$\tau = 1 + e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = p_1 - p_1^3 t \quad (2.29)$$

は双線形形式の解であり , 孤立波 (2.12) と同値である .

### 2 ソリトン解

次に  $f_1$  として ,

$$f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad \eta_i = p_i x + q_i t \quad (i = 1, 2) \quad (2.30)$$

という形のものを考える . これを (2.23) に代入すると ,

$$q_i = -p_i^3 \quad (i = 1, 2) \quad (2.31)$$

とすればよいことが分かる . 次に (2.24) より ,

$$\begin{aligned} 2(\partial_x + \partial_t + \partial_x^4) f_2 &= -(D_x D_t + D_x^4) e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \cdot e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \\ &= -2(D_x D_t + D_x^4) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} \\ &= -2 \{ (p_1 - p_2)(q_1 - q_2) + (p_1 - p_2)^4 \} e^{\eta_1 + \eta_2} \\ &= -2 \{ (p_1 - p_2)(-p_1^3 + p_2^3) + (p_1 - p_2)^4 \} e^{\eta_1 + \eta_2} \\ &= -2 \{ -(p_1 - p_2)(p_1 - p_2)(p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2) + (p_1 - p_2)^4 \} e^{\eta_1 + \eta_2} \\ &= 6(p_1 - p_2)^2 p_1 p_2 e^{\eta_1 + \eta_2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

そこで ,  $f_2$  に対して

$$f_2 = A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} \quad (A_{12} \text{ は定数}) \quad (2.33)$$

という形を仮定すると ,

$$\begin{aligned} (\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_2 &= A_{12} \{ (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) + (p_1 + p_2)^4 \} e^{\eta_1 + \eta_2} \\ &= A_{12} (p_1 + p_2)^2 3 p_1 p_2 e^{\eta_1 + \eta_2} \\ &= 3(p_1 + p_2)^2 p_1 p_2 e^{\eta_1 + \eta_2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

となるので ,

$$A_{12} = \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_2} \right)^2 \quad (2.35)$$

とすればよい．さらに (2.25) は

$$(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_3 = -(D_x D_t + D_x^4)(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} \quad (2.36)$$

となるが，この右辺において，

$$\begin{aligned} (D_x D_t + D_x^4) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_1 + \eta_2} &= (p_2 q_2 + p_2^4) e^{2\eta_1 + \eta_2} = 0, \\ (D_x D_t + D_x^4) e^{\eta_2} \cdot e^{\eta_1 + \eta_2} &= \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

なので， $f_3$  が満たすべき方程式は

$$(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f_3 = 0 \quad (2.38)$$

となり， $f_3 = 0$  としてよい．同様に，

$$f_4 = f_5 = \dots = 0 \quad (2.39)$$

と取ることができて，次の形の解が得られる:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1 + \varepsilon(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \varepsilon A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2}, \\ q_i &= -p_i^3 \quad (i = 1, 2), \quad A_{12} = \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

これを (2.13) に代入すれば，“2 ソリトン解” が得られる．

問 2.3. 計算機 (Mathematica, Maple, Maxima 等) を用いて，1 ソリトン，2 ソリトンのグラフを描け．

注 2.1.  $f_1$  の形を  $f_1 = e^{\eta_1} + \dots + e^{\eta_N}$  と選べば，(形式的) 摂動展開は  $O(\varepsilon^N)$  で切れて，“ $N$  ソリトン解” が得られる．

注 2.2. ソリトンの相互作用はすべて 2 体相互作用に「因子化」される．例えば 3 ソリトン解は

$$\tau_3 = 1 + \varepsilon(e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3}) + \varepsilon^2(A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} + A_{23} e^{\eta_2 + \eta_3} + A_{31} e^{\eta_3 + \eta_1}) + \varepsilon^3 A_{123} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \quad (2.41)$$

という形であるが，3 体相互作用の係数  $A_{123}$  は  $A_{123} = A_{12} A_{23} A_{13}$  となる．

注 2.3. 多くのソリトン方程式が，本節で紹介した方法で求められる．ただし，変数変換は双線形化がうまくいくように発見的に選ぶ必要がある．ここで用いた (2.13) だけでなく，例えば， $u = \frac{G}{F}$ ， $\left( \log \frac{G}{F} \right)_x$  などが，各々の方程式に応じて用いられる．1 つの非線形方程式から複数の双線形化が得られることがある．また，複数の非線形方程式が同じ双線形方程式を共有することもある．

## 2.2 KP 方程式とソリトン解

Kadomtsev と Petviashvili は，KdV 方程式 (2.1) に横方向の弱分散性を加えて，次の方程式を導出した [11] ．

$$(4u_t - 6uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0 \quad (2.42)$$

これを Kadomtsev-Petviashvili 方程式 (KP 方程式) という．(2.42) に  $u = 2(\log \tau)_{xx}$  を代入して，前節と同様の計算を行うと，次の双線形方程式が得られる．

$$(D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2) \tau \cdot \tau = 0 \quad (2.43)$$

この方程式に対しても, Hirotaの方法を適用することができる [24, 2]. まずは  $\tau = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$  を代入して整理すると,

$$O(\varepsilon) : (\partial_x^4 - 4\partial_x\partial_t + 3\partial_y^3)f_1 = 0 \quad (2.44)$$

$$O(\varepsilon^2) : 2(\partial_x^4 - 4\partial_x\partial_t + 3\partial_y^3)f_2 = -2(D_X^4 - 4D_xD_t + 3D_y^2)f_1 \cdot f_1 \quad (2.45)$$

$$O(\varepsilon^3) : 2(\partial_x^4 - 4\partial_x\partial_t + 3\partial_y^3)f_3 = -(D_X^4 - 4D_xD_t + 3D_y^2)f_1 \cdot f_2 \quad (2.46)$$

⋮

2ソリトン解を求めるために,

$$f_i = e^{\eta_i}, \quad \eta_i = P_i x + Q_i y + R_i t \quad (i = 1, 2) \quad (2.47)$$

という形を仮定する. (2.44) より

$$P_i^4 - P_i R_i + 3Q_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.48)$$

が得られる. 次に (2.45) より

$$\begin{aligned} 2(\partial_x^4 - 4\partial_x\partial_t + 3\partial_y^3)f_2 &= -2(D_X^4 - 4D_xD_t + 3D_y^2)e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} \\ &= -2[(P_1 - P_2)^4 - 4(P_1 - P_2)(R_1 - R_2) + 3(Q_1 - Q_2)^2]e^{\eta_1 + \eta_2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

であるので,  $f_2 = A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2}$  とおくと

$$A_{12} = \frac{(P_1 - P_2)^4 - 4(P_1 - P_2)(R_1 - R_2) + 3(Q_1 - Q_2)^2}{(P_1 + P_2)^4 - 4(P_1 + P_2)(R_1 + R_2) + 3(Q_1 + Q_2)^2} \quad (2.50)$$

が得られる. さらに, 前節の議論と同様に, この場合は  $f_3 = f_4 = \dots = 0$  とすることができる.

今得られた  $A_{12}$  の形 (2.50) はやや複雑であるが, うまい変数変換を行うと簡潔な形にすることができる.

**命題 2.2** (Oishi [21]). 変数変換

$$P_i = p_i - q_i, \quad Q_i = p_i^2 - q_i^2, \quad R_i = p_i^3 - q_i^3 \quad (2.51)$$

を用いれば, (2.48) は恒等的に満たされる. さらに, (2.50) の  $A_{12}$  は次の形に表される.

$$A_{12} = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)} \quad (2.52)$$

このパラメータを用いると, 2ソリトン解は次のように, より簡単な形に整理される.

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + A_{12}e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2}, \\ \eta_i &= p_i x + p_i^2 y + p_i^3 t, \quad \xi = q_i x + q_i^2 y + q_i^3 t, \quad A_{12} = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

2ソリトン解 (2.53) は, 行列式を用いて表すことができる.

**命題 2.3.**  $\tau_2 \simeq \begin{vmatrix} e^{\eta_1} + e^{\xi_1} & p_1 e^{\eta_1} + q_1 e^{\xi_1} \\ e^{\eta_2} + e^{\xi_2} & p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2} \end{vmatrix}$

ここで, 記号 “ $\simeq$ ” は「自明な乗法因子を除いて等しい」ということ意味する. 今の場合, ある  $\tau$  が双線形方程式の解ならば,  $\tau' = e^\eta \tau$ ,  $\eta = Px + Qy + Rt$  も  $\tau$  と同じ解を与える. すなわち,  $(\log \tau)_{xx} = (\log \tau')_{xx}$  である. このことを,  $\tau' \simeq \tau$  と表す.

命題 2.3 の証明. 行列式を展開すると,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} e^{\eta_1} + e^{\xi_1} & p_1 e^{\eta_1} + q_2 e^{\xi_1} \\ e^{\eta_2} + e^{\xi_2} & p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2} \end{vmatrix} &= (e^{\eta_1} + e^{\xi_1})(p_2 e^{\eta_2} + q_2 e^{\xi_2}) - (e^{\eta_2} + e^{\xi_2})(p_1 e^{\eta_1} + q_2 e^{\xi_1}) \\
&= (p_2 - p_1)e^{\eta_1 + \eta_2} + (q_2 - p_1)e^{\eta_1 + \xi_2} + (p_2 - q_1)e^{\eta_2 + \xi_1} + (q_2 - q_1)e^{\xi_1 + \xi_2} \\
&= (q_2 - q_1)e^{\xi_1 + \xi_2} \left( 1 + \frac{q_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 - \xi_1} + \frac{p_2 - q_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \right) \\
&\doteq 1 + \frac{q_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 - \xi_1} + \frac{p_2 - q_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \tag{2.54}
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\eta + \log(q_2 - q_1) = \tilde{\eta}_1 \tag{2.55}$$

とおき, 改めて  $\tilde{\eta}_1$  を  $\eta_1$  とおくことを  $\eta_1 + \log(q_2 - q_1) = \tilde{\eta}_1 \rightarrow \eta_1$  と書くことにする. 同様に

$$\begin{aligned}
\eta_2 + \log(p_2 - p_1) &= \tilde{\eta}_2 \rightarrow \eta_2, \\
\xi_1 + \log(q_2 - q_1) &= \tilde{\xi}_1 \rightarrow \xi_1, \\
\xi_2 + \log(q_2 - q_1) &= \tilde{\xi}_2 \rightarrow \xi_2
\end{aligned} \tag{2.56}$$

とする. こうすれば,

$$\begin{aligned}
(2.54) &= 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \cdot \frac{(q_2 - q_1)^2}{(q_2 - p_1)(p_2 - q_1)} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \\
&= 1 + e^{\eta_1 - \xi_1} + e^{\eta_2 - \xi_2} + \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)} e^{\eta_1 + \eta_2 - \xi_1 - \xi_2} \tag{2.57}
\end{aligned}$$

となり, (2.53) と一致する. □

命題 2.3 の行列式表示は,

$$\tau_2 = \begin{vmatrix} e^{\eta_1} + e^{\xi_1} & \partial_x(e^{\eta_1} + e^{\xi_1}) \\ e^{\eta_2} + e^{\xi_2} & \partial_x(e^{\eta_2} + e^{\xi_2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \partial_x f_1 \\ f_2 & \partial_x f_2 \end{vmatrix} \tag{2.58}$$

という, Wronski 行列式の形をしている. さらに, 成分  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) は,

$$\partial_y f_i = \partial_x^2 f_i, \quad \partial_t f_i = \partial_x^3 f_i \tag{2.59}$$

と満たしている. そこで,

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & \partial_x f_1 & \cdots & \partial_x^{N-1} f_1 \\ f_2 & \partial_x f_2 & \cdots & \partial_x^{N-1} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & \partial_x f_N & \cdots & \partial_x^{N-1} f_N \end{vmatrix} \tag{2.60}$$

と一般化したくなる. 実際に次の定理が成立する.

**定理 2.1.** (2.60) の  $\tau = \tau(x, y, t)$  において, 行列式の成分の  $f_i(x, y, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) が (2.59) を満たすならば,  $\tau$  は (2.43) を満たす.

証明のポイントは, 次の 2 つである.

ポイント 1: ( $\tau$  の微分) = (列がシフトした行列式の和)

または (列をシフトした行列式) = (ある微分作用素)  $\times$   $\tau$



ポイント 2: (双線形方程式) = (行列式の 2 次の恒等式 (Plücker 関係式))

これらを順に説明していく .

ポイント 1: (列をシフトした行列式) = (ある微分作用素)  $\times \tau$

まず, (2.60) の  $\tau$  を表すために, 次の略記法を導入しておく (Freeman-Nimmo の記号) .

$$\tau = |0, 1, \dots, N-1|, \quad j = \begin{bmatrix} \partial_x^j f_1 \\ \vdots \\ \partial_x^j f_N \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

この記法を用いると,  $\tau$  の微分は以下のように表される .

$$\begin{aligned} \partial_x \tau &= |1, 1, \dots, N-1| + |0, 2, 2, \dots, N-1| + \dots + |0, 1, \dots, N-2, N| \\ &= |0, 1, \dots, N-2, N|, \\ \partial_x^2 \tau &= |0, 1, \dots, N-3, N-1, N| + |0, 1, \dots, N-3, N-2, N+1|, \\ \partial_y \tau &= -|0, 1, \dots, N-3, N-1, N| + |0, 1, \dots, N-3, N-2, N+1|. \end{aligned} \quad (2.62)$$

(2.62) より,

$$\begin{aligned} |0, 1, \dots, N-3, N-2, N+1| &= \frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y)\tau, \\ |0, 1, \dots, N-3, N-1, N| &= \frac{1}{2}(\partial_x^2 - \partial_y)\tau \end{aligned} \quad (2.63)$$

が得られる . さらに,

$$\begin{aligned} \partial_x^3 \tau &= |0, 1, \dots, N-4, N-2, N-1, N| \\ &\quad + 2|0, 1, \dots, N-4, N-3, N-1, N+1| \\ &\quad + |0, 1, \dots, N-4, N-3, N-1, N+2|, \\ \partial_x \partial_y \tau &= -|0, 1, \dots, N-4, N-2, N-1, N| \\ &\quad + |0, 1, \dots, N-4, N-3, N-2, N+1|, \\ \partial_t \tau &= |0, 1, \dots, N-4, N-2, N-1, N| \\ &\quad - |0, 1, \dots, N-4, N-3, N-1, N+1| \\ &\quad + |0, 1, \dots, N-4, N-3, N-2, N+2| \end{aligned} \quad (2.64)$$

により, 次が得られる .

$$\begin{aligned} |0, 1, \dots, N-4, N-2, N-1, N| &= \left( \frac{1}{6} \partial_x^3 - \frac{1}{2} \partial_x \partial_y + \frac{1}{3} \partial_t \right) \tau, \\ |0, 1, \dots, N-4, N-3, N-1, N+1| &= \left( \frac{1}{3} \partial_x^3 - \frac{1}{3} \partial_t \right) \tau, \\ |0, 1, \dots, N-4, N-3, N-2, N+2| &= \left( \frac{1}{6} \partial_x^3 + \frac{1}{2} \partial_x \partial_y + \frac{1}{3} \partial_t \right) \tau. \end{aligned} \quad (2.65)$$

ここで, 計算の見通しをよくするために, “Maya 図形” (M. Sato [23]) という記法を導入しておく . (2.60), (2.61) の Wronski 行列式を,

$$\tau = \begin{array}{ccccccc} & 0 & 1 & \dots\dots & N-2 & N-1 & N & N+1 \\ \tau = & \boxed{\circ} & \boxed{\circ} & \boxed{\dots\dots} & \boxed{\circ} & \boxed{\circ} & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\phantom{\circ}} \end{array} \quad (2.66)$$

と表す．すると，微分公式 (2.62) は次のように表される:

$$\begin{aligned}
 \partial_x \tau &= \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & \cdots & N-2 & N-1 & N & N+1 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 \partial_x^2 \tau &= \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} + \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 \partial_y \tau &= - \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} + \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

同様に，(2.64) は次のようになる:

$$\begin{aligned}
 \partial_x^3 \tau &= \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} + 2 \times \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} \\
 &\quad + \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 \partial_x \partial_y \tau &= - \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} + \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 \partial_t \tau &= \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} - \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} \\
 &\quad + \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

さらに，

$$\begin{aligned}
 A &= |0, \dots, N-5, N-3, N-2, N-1, N| = \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 B &= |0, \dots, N-5, N-4, N-3, N, N+1| = \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 C &= |0, \dots, N-5, N-4, N-3, N-1, N+2| = \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 D &= |0, \dots, N-5, N-4, N-2, N-1, N+1| = \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}, \\
 E &= |0, \dots, N-5, N-4, N-3, N-2, N+3| = \begin{array}{ccccccc} N-4 & N-3 & N-2 & N-1 & N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array},
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

とすると，ここまでと同様にして，

$$\begin{cases} \partial_x^4 \tau = A + 2B + 3C + 3D + E, \\ \partial_x^2 \partial_y \tau = -A + C - D + E, \\ \partial_x \partial_t \tau = A - 2B + E, \\ \partial_y^2 \tau = A + 2B - C - D + E \end{cases} \tag{2.70}$$

が得られる．

注 2.4. 上の  $A \sim E$  を“(微分作用素) $\times\tau$ ”の形で表すには, 新たな独立変数  $z$  を  $\partial_z f_i = \partial_x^4 f_i$  で導入する必要がある.

以上を用いると, 双線形形式での KP 方程式 (2.43) を, 列がシフトした行列式に対する関係式に書き直すことができる.

$$\begin{aligned}
 (2.43) &\Leftrightarrow (\tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3\tau_{xx}^2) - 4(\tau_{xt}\tau - \tau_x\tau_t) + 3(\tau_{yy}\tau - \tau_y^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow |0, \dots, N-3, N-2, N-1| \times |0, \dots, N-3, N, N+1| \\
 &\quad - |0, \dots, N-3, N-2, N| \times |0, \dots, N-3, N-1, N+1| \\
 &\quad + |0, \dots, N-3, N-2, N+1| \times |0, \dots, N-3, N-1, N| = 0 \quad (2.71)
 \end{aligned}$$

(2.71) を Maya 図形を用いて表すと, 次のようになる.

$$\begin{array}{cccc}
 & N-2 & N-1 & N & N+1 & & N-2 & N-1 & N & N+1 \\
 & \boxed{\circ} & \boxed{\circ} & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\phantom{\circ}} & \times & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\circ} & \boxed{\circ} \\
 - & \boxed{\circ} & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\circ} & \boxed{\phantom{\circ}} & \times & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\circ} & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\circ} \\
 + & \boxed{\circ} & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\circ} & \times & \boxed{\phantom{\circ}} & \boxed{\circ} & \boxed{\circ} & \boxed{\phantom{\circ}} = 0
 \end{array} \quad (2.72)$$

問 2.4. (2.43) が (2.71) の形に書き換えられることを証明せよ.

次に, これが行列式の恒等式 (Plücker 関係式) であることを示そう.

ポイント 2: (双線形方程式) = (行列式の 2 次の恒等式 (Plücker 関係式))

まずは準備として, 行列式の Laplace 展開を導入しておく.

命題 2.4.  $N$  次正方行列  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  に対して,

$$\begin{aligned}
 |A|_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} &= A \text{ から } i_1 \text{ 行, } i_2 \text{ 行, } \dots, i_k \text{ 行,} \\
 &\quad j_1 \text{ 列, } j_2 \text{ 列, } \dots, j_k \text{ 列を選んでつくった } k \times k \text{ 小行列式} \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

とする.  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$  を満たす.  $i_1, \dots, i_k$  を固定すると, 次が成立する:

$$\det A = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} |A|_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} \times |A|_{j_{k+1} \dots j_N}^{i_{k+1} \dots i_N} \times (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \quad (2.74)$$

ただし,  $i_{k+1}, \dots, i_N$  は  $1, \dots, N$  から  $i_1, \dots, i_k$  を取り去った残りの  $N - k$  個の数を小さい順に並べたものである.  $j_{k+1}, \dots, j_N$  についても同様である.

命題 2.4 の証明については, 適当な線形代数の本を参照していただきたい (例えば [10, 22]).

命題 2.5.

$$\left| \begin{array}{c|c|c}
 \mathbf{0, 1, \dots, N-3} & \emptyset & \mathbf{N-1, N, N+1} \\
 \hline
 \emptyset & \mathbf{0, 1, \dots, N-3, N-2} & \mathbf{N-1, N, N+1}
 \end{array} \right| = 0 \quad (2.75)$$

ここで, 記号  $\emptyset$  の部分の成分は全て 0 であるものとする.

命題 2.5 の証明.

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \left| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{0, 1, \dots, N-3} & \emptyset & N-1, N, N+1 \\ \hline \mathbf{0, -1, \dots, -(N-3)} & \mathbf{0, 1, \dots, N-3, N-2} & \emptyset \end{array} \right| \\
 &\quad (\text{第 } (N+k) \text{ 行から第 } k \text{ 行を引いた } (k=1, 2, \dots, N)) \\
 &= \left| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{0, 1, \dots, N-3} & \emptyset & N-1, N, N+1 \\ \hline \emptyset & \mathbf{0, 1, \dots, N-3, N-2} & \emptyset \end{array} \right| \quad (2.76) \\
 &\quad (\text{第 } k \text{ 列に第 } (N-2)+k \text{ 列を加えた } (k=1, 2, \dots, N-2))
 \end{aligned}$$

(2.76) を Laplace 展開する .  $k = N, i_1 = 1, \dots, i_N = N$  として (2.74) を適用すると, (2.76) の下のブロックの  $\emptyset$  列の本数は  $(N+1)$  本なので, 展開して現れる下のブロックからの因子は全て 0 となる .  $\square$

定理 2.1 の証明. 命題 2.5 の証明では, 行列式に基本変形を施してから Laplace 展開を行い, 0 であることを示した . (2.75) の左辺を直接 Laplace 展開することで,

$$\begin{aligned}
 &|\mathbf{0, \dots, N-3, N, N+1}| \times |\mathbf{0, \dots, N-3, N-2, N-1}| \\
 &- |\mathbf{0, \dots, N-3, N-1}| \times |\mathbf{0, \dots, N-3, N-2, N}| \\
 &+ |\mathbf{0, \dots, N-3, N-1, N}| \times |\mathbf{0, \dots, N-3, N-2, N+1}| = 0 \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

が得られる . これと (2.71) とにより, 定理 2.1 が証明されたことになる .  $\square$

注 2.5. (2.75) の左辺において, 右の 4 列の取り方はどうでもよい . 右 3 列のブロックの列数も 3 以上であればなんでもよい . すなわち, Plücker 関係式は無数に存在する . (実は, 行列式の二次恒等式はこれで全て尽くされる .)

注 2.6. KP 方程式の独立変数は  $x, y, t$  の 3 つのみだが, 関係式

$$\partial_{x_1} f_i = \partial_{t_j} f_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.78)$$

を満たすように無限個の独立変数  $t_1, t_2, t_3, \dots$  を導入することができる ( $x = t_1, y = t_2, t = t_3$ ) . こうすれば,  $\tau$  の列を任意にシフトしてつくられる行列式は,  $\tau$  に対して, ある微分作用素を作用させることで得られる [2] .

注 2.7. 注 2.5, 注 2.6 により,

$$\begin{aligned}
 \text{無限個の Plücker 関係式} &\leftrightarrow \tau \text{ に関する無限個の微分方程式の系列} \\
 &(\text{実は全て双線形方程式となる .})
 \end{aligned}$$

こうして得られる無限個の微分方程式の系列が, “KP 階層” (KP hierarchy) である [18, 23, 26] .

## 2.3 KdV 方程式, mKdV 方程式への簡約 (reduction)

前節では, 双線形形式の KP 方程式 (2.43) に対して,  $N$  次の Wronski 行列式で表される解を構成した . KP 方程式 (2.43) において  $y = t_2$  に対する依存性を落とせば, (双線形形式の) KdV 方程式 (2.20) が得られる . しかし, (2.43) を満たす  $\tau(x, y, t)$  に対して, 単に「 $y = \text{定数}$ 」とおくだけでは, KdV 方程式の解は得られない . そこで, 「解のレベルで, どのようにしてこの制限を実現するか」という問題を考えてみよう .

行列式解

$$\tau = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & \partial_x^{N-1} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & \cdots & \partial_x^{N-1} f_N \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

において，成分に対する線形微分方程式

$$\partial_{t_j} f_i = \partial_{t_1}^j f_i \quad (i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.80)$$

を満たす例として，

$$f_i = e^{\eta_i} + e^{\xi_i}, \quad \eta_i = p_i t_1 + p_i^2 t_2 + p_i^3 t_3, \quad \xi_i = q_i t_1 + q_i^2 t_2 + q_i^3 t_3 \quad (2.81)$$

を考える．このとき，単に「 $t_2 = \text{定数}$ 」とおくだけでは，前節で議論したような微分公式（例えば(2.62)の第3式）が成立しなくなる．そこで， $\partial_{t_2} \tau = 0$ とするのではなく，解のパラメータに制限をおくことで，

$$D_{t_2}^2 \tau \cdot \tau = 2(\tau_{t_2 t_2} \tau - \tau_{t_2}^2) = 0 \quad (2.82)$$

となるようにすることを考える（“2-reduction”）．(2.82)となるための1つの十分条件として，

$$\partial_{t_2} \tau = (\text{定数}) \times \tau \quad (2.83)$$

が挙げられる．上の(2.81)の場合には，

$$\partial_{t_2} f_i = p_i^2 e^{\eta_i} + q_i^2 e^{\xi_i} \quad (2.84)$$

であるので， $q_i = -p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) とすれば，(2.83)が満足される．

同様に，自然数  $l$  に対して  $p_i^l = q_i^l$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) となるようにすれば， $\tau$  に対しては  $\partial_{t_l} \tau = (\text{定数}) \times \tau$  となり，非線形方程式の  $t_1, t_{2l}, t_{3l}, \dots$  に対する依存性を落とすことができる（“ $l$ -reduction”）．

KP 方程式 (2.42) の “2-reduction” によって得られる KdV 方程式は

$$4u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0 \quad (2.85)$$

という形であり，(2.1)とは係数が異なる．(2.85)に対応する双線形形式は， $u = 2(\log \tau)_{xx}$  とおくことにより

$$(D_x^4 - 4D_x D_t) \tau \cdot \tau = 0 \quad (2.86)$$

であることが分かる．これを満たす  $\tau$  の例としては，

$$\tau = \begin{bmatrix} f^{(1)} & \partial_x f^{(1)} & \cdots & \partial_x^{N-1} f^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(N)} & \partial_x f^{(N)} & \cdots & \partial_x^{N-1} f^{(N)} \end{bmatrix}, \quad f^{(i)} = \alpha_i e^{\eta_i} + \beta e^{-\eta_i}, \quad \eta_i = p_i x + p_i^3 t \quad (2.87)$$

という行列式解があることは，既に証明済みである．

注 2.8. 方程式 (2.85) の係数を (2.1) に合わせるために，(2.85) で  $t = -4t'$  とおくと，

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{1}{4} \partial_{t'} \quad (2.88)$$

より，

$$u_{t'} + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.89)$$

が得られる．これで  $t'$  を改めて  $t$  とおけばよい．このとき  $\eta_i = p_i x - 4p_i^3 t$  である．

次に, mKdV 方程式

$$4v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \quad (2.90)$$

を考えよう. ((2.2) とは係数が異なる.)

命題 2.6. 自然数  $n$  に対して,  $\tau_n = \tau_n(x, t)$  を

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & \cdots & \partial_x^{N-1} f_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)} & \cdots & \partial_x^{N-1} f_n^{(N)} \end{vmatrix} \quad (2.91)$$

で定める. 行列式の成分  $f_n^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) が

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n e^{\eta_i} + \beta_i (-p_i)^n e^{-\eta_i}, \quad \eta_i = p_i x + p_i^3 t \quad (2.92)$$

を満たすならば,  $\tau_n$  は次の双線形方程式の解となる.

$$D_x^2 \tau_{n+1} \cdot \tau_n = 0, \quad (D_x^3 - 4D_t) \tau_{n+1} \cdot \tau_n = 0 \quad (2.93)$$

命題 2.7.  $\tau_n, \tau_{n+1}$  が, 双線形方程式 (2.93) を満たすならば,

$$v = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \quad (2.94)$$

で定められる  $v$  は mKdV 方程式 (2.90) の解となる.

命題 2.6 の証明は後回しにして, まずは命題 2.7 を証明しよう.

命題 2.7 の証明.  $\rho = \rho(x, t), \phi = \phi(x, t)$  を

$$\rho = \log \tau_{n+1} \tau_n, \quad \phi = \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \quad (2.95)$$

によって定める. このとき, (2.93) を  $\tau_{n+1} \tau_n$  で割ると,

$$\rho_{xx} + \phi_x^2 = 0, \quad \phi_{xxx} + 3\phi_x \rho_{xx} + \phi_x^3 - 4\phi_t = 0 \quad (2.96)$$

が, それぞれ得られる. この両式より  $\rho$  を消去すると

$$4\phi_t - 2\phi_x^3 + \phi_{xxx} = 0 \quad (\text{potential mKdV 方程式}) \quad (2.97)$$

となるので,  $v = \phi_x = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}$  が (2.90) を満たすことが示される.  $\square$

注 2.9.  $\tau_n, \tau_{n+1}$  はともに KdV 方程式の  $\tau$  関数である. すなわち,  $\tau_n, \tau_{n+1}$  はどちらも双線形方程式 (2.20) を満たす.

注 2.10.  $\tau_{n+2} \approx \tau_n$  が成立する. 実際,

$$f_{n+2}^{(i)} = \alpha_i p_i^{n+2} e^{\eta_i} + \beta_i (-p_i)^{n+2} e^{-\eta_i} = p_i^2 f_n^{(i)} \quad (2.98)$$

なので,  $\tau_{n+2} = (p_1^2 \cdots p_N^2) \tau_n$  である.

注 2.11. (2.93) の第 1 式は Miura 変換を与える . (2.93) の第 1 式を  $\tau_{n+1}\tau_n$  で割ると ,

$$\begin{aligned}\rho_{xx} + \phi_x^2 &= (\log \tau_{n+1}\tau_n)_{xx} + \left\{ \left( \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right)_x \right\}^2 \\ &= 2(\log \tau_n)_{xx} + \left( \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right) + \left\{ \left( \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \right) \right\} \\ &= u + v_x + v^2 = 0\end{aligned}\tag{2.99}$$

となり , (2.3) が得られる .

命題 2.6 の証明. まずは (2.92) を拡張して ,

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n e^{\eta_i} + \beta_i q_i^n e^{\xi_i}, \quad \eta_i = p_i x + p_i^2 y + p_i^3 t, \quad \xi_i = q_i x + q_i^2 y + q_i^3 t\tag{2.100}$$

として考える . Freeman-Nimmo の記法を用いると ,

$$\tau_n = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} - \mathbf{1}|, \quad \tau_{n+1} = |\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{1}, \mathbf{N}|\tag{2.101}$$

である . ここで微分公式を思い出しておこう .

$$\begin{aligned}\partial_x \tau_n &= |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N}|, \\ \partial_x \tau_{n+1} &= |\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{1}, \mathbf{N} + \mathbf{1}| \\ \frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y) \tau_n &= |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{3}, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} + \mathbf{1}|, \\ \frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y) \tau_{n+1} &= |\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} - \mathbf{1}, \mathbf{N} + \mathbf{2}|, \\ \frac{1}{2}(\partial_x^2 - \partial_y) \tau_n &= |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{3}, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N}|, \\ \frac{1}{2}(\partial_x^2 - \partial_y) \tau_{n+1} &= |\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N}, \mathbf{N} + \mathbf{1}|.\end{aligned}\tag{2.102}$$

2.2 節での議論と同様に , 恒等的に 0 である行列式

$$\left| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2} & \emptyset & \mathbf{N} - \mathbf{1}, \mathbf{N}, \mathbf{N} + \mathbf{1} \\ \hline \emptyset & \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2} & \mathbf{N} - \mathbf{1}, \mathbf{N}, \mathbf{N} + \mathbf{1} \end{array} \right| = 0\tag{2.103}$$

に対して Laplace 展開を適用することで ,

$$\begin{aligned}& |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} - \mathbf{1}| \times |\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N}, \mathbf{N} + \mathbf{1}| \\ & - |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N}| \times |\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} - \mathbf{1}, \mathbf{N} + \mathbf{1}| \\ & + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} + \mathbf{1}| \times |\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} - \mathbf{1}, \mathbf{N}| = 0\end{aligned}\tag{2.104}$$

が得られ , さらに微分公式を適用することで ,

$$\begin{aligned}(2.104) \text{ の左辺} &= \tau_n \times \frac{1}{2}(\partial_x^2 - \partial_y) \tau_{n+1} - \partial_x \tau_n \times \partial_x \tau_{n+1} + \frac{1}{2}(\partial_x^2 + \partial_y) \tau_n \times \tau_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x^2 \tau_{n+1} \tau_n - 2\partial_x \tau_{n+1} \times \partial_x \tau_n + \tau_{n+1} \times \partial_x^2 \tau_n) - \frac{1}{2}(\partial_y \tau_{n+1} \times \tau_n - \tau_{n+1} \times \partial_y \tau_n) \\ &= \frac{1}{2}(D_x^2 - D_y) \tau_{n+1} \cdot \tau_n\end{aligned}\tag{2.105}$$

と書き換えられる . こうして

$$(D_x^2 - D_y) \tau_{n+1} \cdot \tau_n = 0\tag{2.106}$$

という双線形形式が得られ、さらにパラメータを  $q_i = -p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) と特殊化すると，“2-reduction” の条件

$$D_y \tau_{n+1} \cdot \tau_n = 0 \quad (2.107)$$

を満たすことになり、これを (2.106) に適用することで (2.93) の第 1 式が得られる。(2.93) の第 2 式についても、同様の手法で示すことができる ( $\rightarrow$  問 2.5) .  $\square$

問 2.5 (難). 上の議論と同様にして

$$(D_x^3 - 4D_t + 3D_x D_y) \tau_{n+1} \cdot \tau_n = 0 \quad (2.108)$$

を示し、2-reduction を施すことで (2.93) の第 2 式を導け .

## 2.4 “Focusing” mKdV 方程式

Modified KdV 方程式は、非線形項の符号によって “focusing”, “defocusing” と区別されるときがある:<sup>2</sup>

$$\text{Defocusing mKdV 方程式} : 4v_t + 6v^2 v_x - v_{xxx} = 0, \quad (2.109)$$

$$\text{Focusing mKdV 方程式} : 4w_t - 6w^2 w_x - w_{xxx} = 0. \quad (2.110)$$

両者は変換  $w = \pm\sqrt{-1}v$  で結びつく . このとき、 $w \in \mathbf{R}$  であるなら  $v \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$  となる . 解の幾何学的、物理学的意味を考える際には、このような “実数条件 (reality condition)” に対する考察が避けられない .

注 2.12. スケール変換で各係数の比は変えられる . ただし、非線形項の符号は変えられない . このことを見るために、 $v = \alpha w$ ,  $t = \beta t'$ ,  $x = \gamma x'$  とおく . すると、

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \partial_{t'}, \quad \partial_x = \frac{1}{\gamma} \partial_{x'} \quad (2.111)$$

であり、(2.109) に代入すると、

$$4w_{t'} + 6\frac{\alpha^2\beta}{\gamma} w^2 w_{x'} - \frac{\beta}{\gamma^3} w_{x'x'x'} \quad (2.112)$$

が得られる . これと (2.110) とを比較すると、

$$\frac{\alpha^2\beta}{\gamma} = A, \quad \frac{\beta}{\gamma^3} = B \quad \Rightarrow \quad A = \alpha^2\gamma^2 B \quad (2.113)$$

となり、 $\alpha, \gamma \in \mathbf{R}$  である限り、符号を変えることはできない .

命題 2.6 の行列式解において、(2.92) のパラメータ  $\alpha_i, \beta_i, p_i$  を実数に選ぶと  $v \in \mathbf{R}$  となり、“Defocusing mKdV” (2.110) の解となる . “Focusing mKdV” (2.110) の解を作るにはどうすれば良いのだろうか？ すなわち、 $w = \frac{1}{\sqrt{-1}}v$ ,  $v \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$  とするにはどうすればよいか？

命題 2.8 (ソリトン解に対する実数条件). 命題 2.6 の行列式解において、(2.92) のパラメータ  $\alpha_i, \beta_i, p_i$  が

$$\alpha_i, p_i \in \mathbf{R}, \quad \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbf{R} \quad (2.114)$$

を満たすとき、次のようになる .

$$\tau_1 \simeq \tau_0^*, \quad v = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_1}{\tau_0} \in \sqrt{-1}\mathbf{R} \quad (2.115)$$

<sup>2</sup>非線形シュレディンガー方程式における用語の転用



証明. 上の条件の下で, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
(2.92) \text{ の } f_{n+1}^{(i)} &= \alpha_i p_i^{n+1} e^{\eta_i} + \beta_i (-p_i)^{n+1} e^{-\eta_i} \\
&= p_i (\alpha_i p_i^n e^{\eta_i} - \beta_i (-p_i)^n e^{-\eta_i}) \\
&= p_i (\alpha_i p_i^n e^{\eta_i} + \beta_i (-p_i)^n e^{-\eta_i})^* = p_i (f_n^{(i)})^*.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

よって,

$$\tau_{n+1} = (p_1 \cdots p_N) \tau_n^* \tag{2.117}$$

が成立する.  $\square$

第1章で導出した, 曲率  $\kappa$  が満たす mKdV 方程式 (1.39) と係数を合わせるために, (2.110) において

$$w = \alpha \kappa, \quad t = \beta t', \quad x = \gamma x' \tag{2.118}$$

とすれば,

$$\kappa_{t'} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha^2 \beta}{\gamma} \kappa \kappa_{x'} - \frac{\beta}{4\gamma^3} = 0 \tag{2.119}$$

が得られるので, (1.39) と比較して,

$$\frac{\alpha^2 \beta}{\gamma} = -1, \quad \frac{\beta}{4\gamma^3} = -1, \tag{2.120}$$

よって,

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 1, \quad \kappa = 2w, \quad t \rightarrow -4t \tag{2.121}$$

とすればよい. 以上をまとめると, 曲率  $\kappa$  が満たす mKdV 方程式 (1.39) に対して,

$$\kappa = \frac{2}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_0}{\tau_0^*}, \quad \tau_0 = \begin{bmatrix} f_0^{(1)} & \cdots & \partial_x^{N-1} f_0^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(N)} & \cdots & \partial_x^{N-1} f_0^{(N)} \end{bmatrix}, \tag{2.122}$$

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n e^{\eta_i} + \beta_i (-p_i)^n e^{-\eta_i}, \quad \eta_i = p_i x - 4p_i^3 t, \quad \alpha_i, \quad p_i \in \mathbf{R}, \quad \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$$

とすることで  $N$  ソリトン解を構成することができる.

命題 2.9 (ブリーザー解). 行列式のサイズを  $N = 2M$  として, 偶数次の行列式を考える.

$$\tau_n^{(2M)} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ f_n^{(2k-1)} & \cdots & \partial_x^{2M-1} f_n^{(2k-1)} \\ f_n^{(2k)} & \cdots & \partial_x^{2M-1} f_n^{(2k)} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{2.123}$$

行列式の成分  $f_n^{(i)}$  の形は, (2.122) と同様に

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n e^{\eta_i} + \beta_i (-p_i)^n e^{-\eta_i}, \quad \eta_i = p_i x - 4p_i^3 t \tag{2.124}$$

と選ぶことにする. (2.122) とは違う条件

$$p_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbf{C}, \quad p_{2k} = p_{2k-1}^*, \quad \alpha_{2k} = \alpha_{2k-1}^*, \quad \beta_{2k} = -\beta_{2k-1}^* \tag{2.125}$$

と選んでも, “実数条件”  $\tau_{n+1}^{(2M)} \Leftrightarrow (\tau_n^{(2M)})^*$  が成立する.

証明. 条件 (2.125) の下では,

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{(2k)} &= \alpha_{2k} p_{2k}^{n+1} e^{\eta_{2k}} + \beta_{2k} (-p_{2k})^{n+1} e^{-\eta_{2k}} \\
&= \alpha_{2k-1}^* p_{2k-1}^* (p_{2k-1}^*)^n e^{\eta_{2k-1}^*} + (-\beta_{2k-1}^*) (-p_{2k-1}^*) (-p_{2k-1}^*)^n e^{-\eta_{2k-1}^*} \\
&= p_{2k-1}^* (f_n^{(2k-1)})^*
\end{aligned} \tag{2.126}$$

が成り立つ. 同様にして  $f_{n+1}^{(2k-1)} = p_{2k}^* (f_n^{2k})^*$  が示されるので,

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}^{(2M)} &= (p_1^* p_2^* \cdots p_{2M-1}^* p_{2M}^*) (\tau_n^{2M})^* \times (-1)^M \\
&= |p_2 p_4 \cdots p_{2M}|^2 (-1)^M (\tau_n^{(2M)})^* \quad (\because p_1^* = p_2)
\end{aligned} \tag{2.127}$$

すなわち,  $\tau_{n+1}^{(2M)} \Leftrightarrow (\tau_n^{(2M)})^*$  である. □

問 2.6. Focusing mKdV 方程式の 2-ソリトン解と 1-ブリーザー解のグラフを描け.

### 第3章 平面曲線の明示公式

この章では、前章で定義した  $\tau$  関数を用いて、連続曲線の明示公式を与える。第1章と同様に、平面曲線

$$\gamma = \begin{bmatrix} X(x, t) \\ Y(x, t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

に対し、Frenet 標構  $\Phi$  を

$$\Phi = [T, N] \in SO(2, \mathbf{R}) \quad (3.2)$$

で定める。ただし、

$$T = \gamma_x = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad N = R\left(\frac{\pi}{2}\right)T \quad (3.3)$$

は、それぞれ接ベクトル、単位法ベクトルである。曲線の時間発展は、Lax 対

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{xx} + \frac{\kappa^3}{2} \\ -\left(\kappa_{xx} + \frac{\kappa^3}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

によって記述され、その両立条件から

$$\kappa_t + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_x + \kappa_{xxx} = 0, \quad \theta_t + \frac{1}{2}(\theta_x)^3 + \theta_{xxx} = 0, \quad \kappa = \theta_x \quad (3.5)$$

が得られるのであった。

定理 3.1 (連続曲線の明示公式). (i)  $\tau$  は次の双線形方程式を満たすものとする。

$$\frac{1}{2}D_x D_y \tau \cdot \tau = -(\tau^*)^2, \quad D_x^2 \tau \cdot \tau^* = 0, \quad (D_x^3 + D_t)\tau \cdot \tau^* = 0. \quad (3.6)$$

(第1式で、新たな独立変数  $y$  を導入していることに注意せよ。) このとき、 $\gamma, \kappa, \theta$  は、 $\tau$  関数を用いて、以下のように書ける。

$$\gamma = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\log \tau \tau^*)_y \\ \frac{2}{\sqrt{-1}} \left(\log \frac{\tau}{\tau^*}\right)_y \end{bmatrix}, \quad \kappa = \frac{2}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{\tau}{\tau^*}, \quad \theta = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau}{\tau^*}. \quad (3.7)$$

(ii) (i) の  $\tau$  関数は次のようにして構成できる。

$$\tau = e^{-xy} \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

ただし、

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n e^{\eta_i} + \beta_i (-p_i)^n e^{\xi_i}, \quad \eta_i = p_i x - 4p_i^3 t + \frac{1}{p_i} y, \quad \xi_i = -p_i x + 4p_i^3 t - \frac{1}{p_i} y \quad (3.9)$$

であり、パラメータ  $\alpha_i, \beta_i, p_i$  は次のどちらかの条件を満たすように選ぶ:

[N-ソリトン解]  $\alpha_i, p_i \in \mathbf{R}, \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$

[M-ブリーザー解]  $N = 2M, \alpha_i, p_i, \beta_i \in \mathbf{C}, p_{2k} = p_{2k-1}^*, \alpha_{2k} = \alpha_{2k-1}^*, \beta_{2k} = -\beta_{2k-1}^*$

証明. (i) まずは,  $T = \gamma_x$  が満たすべき式を求める. Frenet の公式 ((3.4) 第 1 式) の第 1 列より

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa N = \kappa R\left(\frac{\pi}{2}\right) T = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} T \quad (3.10)$$

一方, 変形を記述する式 ((3.4) 第 2 式) の第 1 列より

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\kappa_{xx} + \frac{\kappa^3}{2}\right) R\left(\frac{\pi}{2}\right) T = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{xx} + \frac{\kappa^3}{2} \\ -\left(\kappa_{xx} + \frac{\kappa^3}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} T \quad (3.11)$$

これらは,  $T = \gamma_x = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$  と表されることと,  $\theta$  が potential mKdV 方程式を満たすことから従う. 実際,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\theta_x \sin \theta \\ \theta_x \cos \theta \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \theta_t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = -\left(\frac{\theta_x^3}{2} + \theta_{xxx}\right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

であり, (3.10), (3.11) が成り立つことが示された. 前章で mKdV 方程式の解を求めたので,

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

が言えればよい. (3.7) の第 1 式の  $X$  を  $x$  で微分すると,

$$X_x = -\frac{1}{2}(\log \tau \tau^*)_{xy} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{D_x D_y \tau \cdot \tau}{2\tau^2} + \frac{D_x D_y \tau^* \cdot \tau^*}{2(\tau^*)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\tau^*)^2}{\tau^2} + \frac{\tau^2}{(\tau^*)^2} \right] \quad (3.15)$$

となるが, (3.7) の第 3 式より  $\frac{\tau}{\tau^*} = \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\theta\right)$  なので,

$$X_x = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta}) = \cos \theta. \quad (3.16)$$

同様に

$$\begin{aligned} Y_x &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left( \log \frac{\tau}{\tau^*} \right)_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[ -\frac{(\tau^*)^2}{\tau^2} + \frac{\tau^2}{(\tau^*)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{-\sqrt{-1}\theta}) = \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

故に (3.14) が得られた.

(ii) (3.6) の 3 つの双線形形式のうち, ここでは第 1 のもののみ導く. (他の 2 つも同様にして証明できる.)

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n e^{p_i x - 4p_i^3 t + \frac{1}{p_i} y} + \beta_i (-p_i)^n e^{-p_i x + 4p_i^3 t - \frac{1}{p_i} y} \quad (3.18)$$

より

$$\partial_x f_n^{(i)} = f_{n+1}^{(i)}, \quad \partial_y f_n^{(i)} = f_{n-1}^{(i)}. \quad (3.19)$$

であるので，

$$\begin{aligned}\sigma_n &:= \det \left[ f_{n+i-1}^{(i)} \right]_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= |0, 1, \dots, N-2, N-1|\end{aligned}\quad (3.20)$$

とすると

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1} &= |-1, 0, \dots, N-2|, \\ \sigma_{n+1} &= |1, \dots, N-2, N-1, N|, \\ \partial_y \sigma_n &= |-1, 1, \dots, N-2, N-1|, \\ \partial_x \sigma_n &= |0, 1, \dots, N-2, N|, \\ (\partial_x \partial_y \sigma_n - 1) \sigma &= |-1, 1, \dots, N-2, N-1|\end{aligned}\quad (3.21)$$

となる．ここで，

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & 0, 1, \dots, N-2 & \emptyset & N-1 & N \\ -1 & \emptyset & 1, \dots, N-2 & N-1 & N \end{vmatrix}\quad (3.22)$$

の右辺を Laplace 展開して微分公式 (3.21) を用いると，

$$\begin{aligned}0 &= |-1, 0, \dots, N-2| \times |1, \dots, N-2, N-1, N| \\ &\quad + |0, \dots, N-2, N-1| \times |-1, 1, \dots, N-2, N| \\ &\quad - |0, \dots, N-2, N| \times |-1, 1, \dots, N-2, N-1| \\ &= \sigma_{n-1} \sigma_{n+1} + \sigma_n \cdot (\partial_x \partial_y - 1) \sigma_n - \partial_x \sigma_n \cdot \partial_y \sigma_n \\ &= \frac{1}{2} D_x D_y \sigma_n \cdot \sigma_n + \sigma_{n-1} \sigma_{n+1} - \sigma_n^2\end{aligned}\quad (3.23)$$

という双線形形式が得られる (2次元戸田方程式)．さらに  $\sigma_n = e^{xy} \tau_n$  とおくと，

$$\frac{\frac{1}{2} D_x D_y \sigma_n \cdot \sigma_n}{\sigma_n^2} = (\log \sigma_n)_{xy} = (\log e^{xy} \tau_n)_{xy} = 1 + (\log \tau_n)_{xy} = 1 + \frac{\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n}{\tau_n^2}\quad (3.24)$$

であるので，(3.23) に代入して整理すると，

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1}\quad (3.25)$$

が得られる．ここで，前節で示したように，上述の条件をパラメータにおくと，実数条件  $\tau_{n+1} = c \tau_n^*$ ，が満たされる．このとき  $\tau_{n-1} = \frac{1}{c} \tau_n^*$  であり，

$$\tau_{n+1} \tau_{n-1} = (\tau^*)^2\quad (3.26)$$

となるので，(3.25) に代入すれば (3.6) の第 1 式が得られる．

□

注 3.1. (3.7) の第 1 式は，次のように書き換えることができる:

$$\gamma = \begin{bmatrix} -\operatorname{Re}(\log \tau^*)_y \\ -\operatorname{Im}(\log \tau^*)_y \end{bmatrix}.\quad (3.27)$$

このことから， $\gamma \in \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$  と見なすとき， $\gamma = -(\log \tau^*)_y$  と表される．

問 3.1. 計算機 (Mathematica, Maple, Maxima 等) を用いて，2-ソリトン解と 1-ブリーザー解に対応する曲線のグラフを描け．

# 第4章 平面離散曲線の等周変形

## 4.1 離散平面曲線とは

滑らかな曲線を離散化するとは、 $I \subset \mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}^n$  への滑らかな写像の離散化を定義することである。ここでの離散という意味は、写像が  $\mathbb{R}$  の区間で定義されているのではなく、その区間に含まれるばらばらの点で定義されているということである。このことを念頭において話を進めよう。写像

$$\begin{array}{ccc} \gamma: & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & \psi & & \psi \\ & n & \longmapsto & \gamma_n \end{array} \quad (4.1)$$

が任意の  $n$  に対して  $\det(\gamma_{n+1} - \gamma_n, \gamma_n - \gamma_{n-1}) \neq 0$  をみたすとき、すなわちどの連続する3点  $\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}$  も同一直線上にないとき、正則な離散平面曲線、あるいは単に離散平面曲線であるという [6, 15, 16]。連続系においては弧長径数が大切だったから、その離散的類似として、“弧長”を  $a_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|$  の和として定める。さらに、2直線  $\overline{\gamma_{n+1}\gamma_n}, \overline{\gamma_n\gamma_{n-1}}$  のなす角を  $K_n$  とする (図 4.1)。

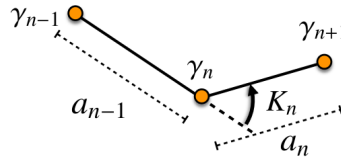


図 4.1: 離散平面曲線

第1章の“Frenetの公式”(1.23)の離散類似を作るために、離散版の“接ベクトル”と“法ベクトル”を定義しよう。

定義 4.1 (離散接ベクトルと離散法ベクトル). 接ベクトル  $T_n$ , 法ベクトル  $N_n$  を,

$$T_n := \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a_n} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_n \\ \sin \Psi_n \end{bmatrix}, \quad N_n := R\left(\frac{\pi}{2}\right) T_n = \begin{bmatrix} -\sin \Psi_n \\ \cos \Psi_n \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

によって定める。ただし  $\Psi_n$  は角関数である (図 4.2)。

図 4.1 の  $K_n$  と、図 4.2 の  $\Psi_n$  との間には、次の関係がある:

$$K_n = \Psi_n - \Psi_{n-1}. \quad (4.3)$$

連続平面曲線と同様にして、離散平面曲線における Frenet の公式を導出する。まず、図 4.1 より、次が成り立つことを注意する。

$$\frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a_n} = R(K_n) \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{a_{n-1}} \quad (4.4)$$

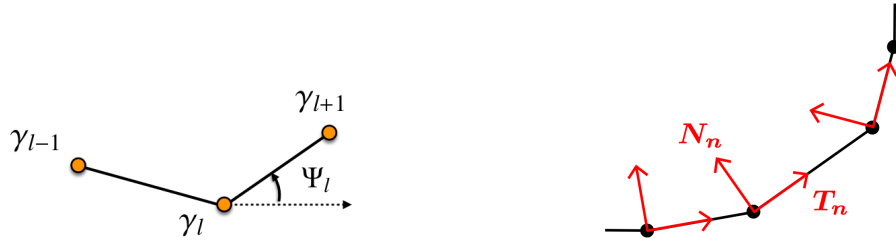


図 4.2: 離散接ベクトル  $T_n$ , 離散法ベクトル  $N_n$ , 角変数  $\Psi_n$

ただし,

$$R(K_n) = \begin{bmatrix} \cos K_n & -\sin K_n \\ \sin K_n & \cos K_n \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

である.  $T_n, N_n$  を用いて表すと,

$$T_n = R(K_n)T_{n-1}, \quad N_n = R(K_n)N_{n-1} \quad (4.6)$$

となる. さらに, Frenet 標構を

$$\Phi_n = [T_n, N_n] = \begin{bmatrix} \cos \Psi_n & -\sin \Psi_n \\ \sin \Psi_n & \cos \Psi_n \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

によって定めれば,  $\Phi_n$  は  $SO(2; \mathbf{R})$  値の関数となり,

$$\Phi_{n+1} = R(K_{n+1})\Phi_n = \Phi_n R(K_{n+1}) = \Phi_n \begin{bmatrix} \cos K_{n+1} & -\sin K_{n+1} \\ \sin K_{n+1} & \cos K_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

が成り立つ. これが, 離散版の Frenet の公式である. さらに, 成分の比較により,

$$T_{n+1} = T_n \cos K_{n+1} + N_n \sin K_{n+1}, \quad N_{n+1} = -T_n \sin K_{n+1} + N_n \cos K_{n+1} \quad (4.9)$$

とも表される.

## 4.2 離散等周変形と離散 mKdV 方程式

離散的な時間発展を記述するために, 次の記法を用いる.<sup>1</sup>

$$\begin{array}{ccc} \gamma: & \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} & \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ & \downarrow & \downarrow \\ & (n, m) & \longmapsto \gamma_n^m \end{array} \quad (4.10)$$

このとき  $m$  に依らず, セグメントの長さが一定であるような条件を考える. これを離散的等周変形とよぶ:

$$|\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m| = a_n, \quad \forall m \in \mathbf{Z}. \quad (4.11)$$

さらに, 等距離条件, つまり  $\gamma_n^m$  から  $\gamma_n^{m+1}$  までの移動距離が  $n$  に依らない変形を考える:

$$|\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m| = b_m, \quad \forall n \in \mathbf{Z}. \quad (4.12)$$

ただし, 平行移動は不可であるとしておく. すなわち,  $\gamma_{n+1}^m, \gamma_n^{m+1}$  が与えられているとき,  $\gamma_{n+1}^{m+1}$  は離散等周条件 (4.11), 等距離条件 (4.12) を満たす点であるので,

<sup>1</sup>“ $\gamma_n^m$ ” は, “ $\gamma_n$  の  $m$  乗を意味するのではない. この種の記法は, 離散可積分系の研究ではよく用いられている.

- $\gamma_n^{m+1}$  を中心とする半径  $a_n$  の円,
- $\gamma_{n+1}^m$  を中心とする半径  $b_m$  の円,

という2つの円の交点として与えられる2点のどちらかであるが、「平行移動」でないほうをとることにする (図 4.3) .

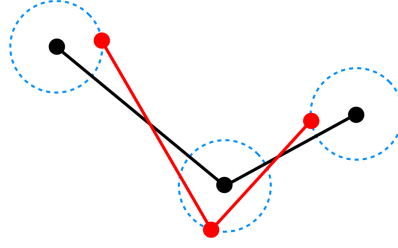


図 4.3: 離散等周・等距離変形

等周条件 (4.11), 等距離条件 (4.12) を満たす変形を記述する離散方程式を導出しよう. まず, 条件 (4.12) より,  $|\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m|/b_m = 1$  であり,  $\{T_n^m, N_n^m\}$  が  $\mathbb{R}^2$  の正規直交基底であることから, 適当な  $W_n^m$  に対して

$$\frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} = T_n^m \cos W_n^m + N_n^m \sin W_n^m = \begin{bmatrix} \cos W_n^m & -\sin W_n^m \\ \sin W_n^m & \cos W_n^m \end{bmatrix} T_n^m \quad (4.13)$$

と表されることが分かる. これを用いて, 離散接ベクトル  $T_n^m = (\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m)/a_n$  の時間発展を考えると,

$$\begin{aligned} T_n^{m+1} - T_n^m &= \frac{\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_n^{m+1}}{a_n} - \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} = \frac{b_m}{a_n} \left( \frac{\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_n^{m+1}}{b_m} - \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{b_m} \right) \\ &= \frac{b_m}{a_n} (T_{n+1}^m \cos W_{n+1}^m + N_{n+1}^m \sin W_{n+1}^m) - \frac{b_m}{a_n} (T_n^m \cos W_n^m + N_n^m \sin W_n^m) \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここに (4.9) を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_n^{m+1}}{a_n} &= \left[ 1 + \frac{b_m}{a_n} (\cos(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m) - \cos K_n^m) \right] T_n^m \\ &\quad + \frac{b_m}{a_n} (\sin(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m) - \sin K_n^m) N_n^m \end{aligned} \quad (4.15)$$

となり, Frenet 標構で書けば

$$\Phi_n^{m+1} = \Phi_n^m \begin{bmatrix} 1 + \frac{b_m}{a_n} (\cos(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m) - \cos K_n^m) & -\frac{b_m}{a_n} (\sin(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m) - \sin K_n^m) \\ \frac{b_m}{a_n} (\sin(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m) - \sin K_n^m) & 1 + \frac{b_m}{a_n} (\cos(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m) - \cos K_n^m) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

が得られる.

以下の計算を簡略化するため,  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  と同一視して考える:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \cup &\quad \cup \\ (x, y) &\mapsto x + \sqrt{-1}y \end{aligned} \quad (4.17)$$



同一視 (4.17) の下で  $\gamma_n^m, T_n^m$  等を  $\mathbb{C}$  の元とみなすと, 関係式 (4.6), (4.13) はそれぞれ次のように書き直される:

$$T_n^m = e^{\sqrt{-1}K_n^m} T_{n-1}^m, \quad N_n^m = e^{\sqrt{-1}K_n^m} N_{n-1}^m, \quad (4.18)$$

$$\frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} = e^{\sqrt{-1}W_n^m} T_n^m \quad (4.19)$$

(4.14) の導出と同様にして,

$$\begin{aligned} T_n^{m+1} - T_n^m &= \frac{\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_n^{m+1}}{a_n} - \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} = \frac{b_m}{a_n} \left( \frac{\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_{n+1}^m}{b_m} - \frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} \right) \\ &\stackrel{(4.19)}{=} \frac{b_m}{a_n} \left( e^{\sqrt{-1}W_{n+1}^m} T_{n+1}^m - e^{\sqrt{-1}W_n^m} T_n^m \right) \\ &\stackrel{(4.18)}{=} \frac{b_m}{a_n} \left( e^{\sqrt{-1}(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m)} - e^{\sqrt{-1}W_n^m} \right) T_n^m \end{aligned} \quad (4.20)$$

これが (4.14) に対応する複素座標の式である.

以上より, 次が導かれる.

**命題 4.1** (Matsuura [16]).  $W_n^m, K_n^m$  ( $m, n \in \mathbf{Z}$ ) は次の関係式を満たす:

$$K_n^{m+1} - K_{n+1}^m = W_{n+1}^m - W_{n-1}^m. \quad (4.21)$$

$$\tan \frac{W_{n+1}^m + K_{n+1}^m}{2} = \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{W_n^m}{2}, \quad (4.22)$$

**証明.** (4.20) より

$$T_n^{m+1} = \left\{ 1 + \frac{b_m}{a_n} \left( e^{\sqrt{-1}(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m)} - e^{\sqrt{-1}W_n^m} \right) \right\} T_n^m \quad (4.23)$$

であるが,  $|T_n^{m+1}| = |T_n^m| = 1$  (等周条件) なので,

$$\left| 1 + \frac{b_m}{a_n} \left( e^{\sqrt{-1}(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m)} - e^{\sqrt{-1}W_n^m} \right) \right| = 1 \quad (4.24)$$

が成立する. ここで簡単のために

$$\sqrt{-1}(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m) = A, \quad \sqrt{-1}W_n^m = B \quad (4.25)$$

とおくと,  $A, B \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$  であり,

$$\begin{aligned} (4.24) &\Leftrightarrow [a_n + b_m(e^A - e^B)] [a_n + b_m(e^{-A} - e^{-B})] = a_n^2 \\ &\Leftrightarrow a_n(e^{A+B} - 1) = b_m(e^A - e^B) \\ &\Leftrightarrow e^{A+B} = 1 + \frac{b_m}{a_n}(e^A - e^B) \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.26) を (4.23) に用いて,

$$T_n^{m+1} = e^{\sqrt{-1}(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m + W_n^m)} T_n^m \quad (4.27)$$

となる. (4.18) と (4.27) に対して, 両立条件  $(T_{n+1})^{m+1} = (T^{m+1})_{n+1}$  を考えると,

$$e^{\sqrt{-1}K_{n+1}^{m+1}} e^{\sqrt{-1}(W_{n+1}^m + K_{n+1}^m + W_n^m)} = e^{\sqrt{-1}(W_{n+2}^m + K_{n+2}^m + W_{n+1}^m)} e^{\sqrt{-1}K_{n+1}^m} \quad (4.28)$$

となるので, (4.21) が得られる.

次に (4.22) を示そう．(4.25) の記法を用いると，

$$\begin{aligned}
(4.22) \Leftrightarrow & \frac{e^{\frac{A}{2}} - e^{-\frac{A}{2}}}{e^{\frac{A}{2}} + e^{-\frac{A}{2}}} = \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \cdot \frac{e^{\frac{B}{2}} - e^{-\frac{B}{2}}}{e^{\frac{B}{2}} + e^{-\frac{B}{2}}} \\
\Leftrightarrow & a_n(e^{\frac{A+B}{2}} - e^{-\frac{A-B}{2}}) = b_m(e^{\frac{A-B}{2}} - e^{-\frac{A+B}{2}}) \\
\Leftrightarrow & (4.26)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

と変形できるので，(4.22) が成り立つことが示された．  $\square$

命題 4.2. ある  $\Theta_n^m$  ( $m, n \in \mathbf{Z}$ ) が

$$\tan \frac{\Theta_{n+1}^{m+1} - \Theta_n^m}{4} = \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{\Theta_n^{m+1} - \Theta_{n+1}^m}{4} \tag{4.30}$$

をみたすとする．この  $\Theta_n^m$  に対して，

$$\Psi_n^m = \frac{\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m}{2}, \quad W_n^m = \frac{\Theta_n^{m+1} - \Theta_{n+1}^m}{2}, \quad K_n^m = \frac{\Theta_{n+1}^m - \Theta_{n-1}^m}{2} \tag{4.31}$$

とおくと，関係式 (4.3)，および命題 4.1 の (4.21)，(4.22) が成立する．

注 4.1. 方程式 (4.30) を離散 potential KdV 方程式 (Hirota, 1998 [4]) という．

証明. (4.3)，(4.21) については，(4.31) より従う．また，(4.22) に (4.31) を代入すれば，(4.30) と一致することもすぐに確認できる．  $\square$

注 4.2. (4.29) より，離散 potential mKdV 方程式 (4.30) は次のように表すこともできる:

$$\frac{1}{b_m} \sin \frac{\Theta_{n+1}^{m+1} + \Theta_n^{m+1} - \Theta_{n+1}^m - \Theta_n^m}{4} = \frac{1}{a_n} \sin \frac{\Theta_{n+1}^{m+1} - \Theta_n^{m+1} + \Theta_{n+1}^m - \Theta_n^m}{4}. \tag{4.32}$$

“ゲージ変換” によって符号を適切に調整すれば，広田による離散 sine-Gordon 方程式 (Hirota, 1977 [5]) と一致する．

### 4.3 離散 potential mKdV 方程式の連続極限

今求めた離散 potential mKdV 方程式 (4.30) の連続極限をとることで，もとの potential KdV 方程式 (2.97) になるかどうかを考える．まずは，

$$\begin{aligned}
a_n &= a \quad (n \text{ によらず一定}), \quad b_m = b \quad (m \text{ によらず一定}), \\
\frac{s}{\delta} &= n + m, \quad l = n - m, \quad \delta = \frac{a+b}{2}, \quad \varepsilon = \frac{a-b}{2}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

とおき，半離散 potential mKdV 方程式を導出しよう．方程式 (4.30) に (4.33) を代入すると，

$$\tan \frac{\Theta_l^{s+2\delta} - \Theta_l^s}{4} = -\frac{\delta}{\varepsilon} \tan \frac{\Theta_{l-1}^{s+\delta} - \Theta_{l+1}^{s+\delta}}{4} \tag{4.34}$$

であるが，変換  $s \mapsto s - \delta$  を行う．

$$\tan \frac{\Theta_l^{s+\delta} - \Theta_l^{s-\delta}}{4} = \frac{\delta}{\varepsilon} \tan \frac{\Theta_{l+1}^s - \Theta_{l-1}^s}{4} \tag{4.35}$$

が得られる．ここで， $\Theta_l^{s\pm\delta} = \Theta_l(s \pm \delta)$  の Taylor 展開を行うと，

$$(4.35) \text{ の左辺} = \tan \frac{1}{4} \left[ \left( \Theta_l + \delta \frac{\partial \Theta_l}{\partial s} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 \Theta_l}{\partial s^2} + \dots \right) - \left( \Theta_l - \delta \frac{\partial \Theta_l}{\partial s} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 \Theta_l}{\partial s^2} - \dots \right) \right] \\ = \tan \left[ \frac{\delta}{2} \frac{\partial \Theta_l}{\partial s} + O(\delta^3) \right] \quad (4.36)$$

ここで  $\tan x$  の Taylor 展開

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{12}x^5 + \dots \quad (4.37)$$

を用いて，極限  $\delta \rightarrow 0$  をとれば，半離散 potential mKdV 方程式

$$\frac{\partial \Theta_l}{\partial s} = \frac{2}{\varepsilon} \tan \frac{\Theta_{l+1} - \Theta_{l-1}}{4} \quad (4.38)$$

が得られる．さらに，

$$x = \varepsilon l + s, \quad t = -\frac{\varepsilon^2}{6}s \quad (4.39)$$

とおいた上で，連続極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  をとれば，potential mKdV 方程式

$$\Theta_t + \frac{1}{2}(\Theta_x)^3 + \Theta_{xxx} = 0 \quad (4.40)$$

が得られる．適当なスケール変換によって係数を調整すると，2.3 節の (2.97) と一致する．

問 4.1. 半離散 potential mKdV 方程式 (4.38) に対して，(4.39) とおいた上で上と同様にして連続極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  をとることで，potential mKdV 方程式 (4.38) を導け．

# 第5章 可積分系の離散化

## 5.1 微分方程式の離散化

離散化<sup>1</sup>の具体例として, Logistic 方程式と Burgers 方程式の離散化を扱っていく (cf. [3, 12, 13]).

例 5.1 (Logistic 方程式). Logistic 方程式

$$u_t = au(1-u) \quad (a \text{ は定数}) \quad (5.1)$$

を考える. まず, (5.1) の両辺に  $\frac{1}{u^2}$  を掛けて, 次のように整理する:

$$\frac{u_t}{u^2} = a \left( \frac{1}{u} - 1 \right) \Leftrightarrow - \left( \frac{1}{u} \right)_t = - \left( \frac{1}{u} - 1 \right)_t. \quad (5.2)$$

ここで  $f = \frac{1}{u} - 1$  ( $\Leftrightarrow u = \frac{1}{1+f}$ ) とおけば,

$$f_t = -af \quad (5.3)$$

なる線形方程式が得られ, 解として

$$f = Ce^{-at} \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (5.4)$$

が求められる. 再度変数変換を施せば, Logistic 方程式の解

$$u = \frac{1}{1 + Ce^{-at}} \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (5.5)$$

が得られる. (5.5) のグラフは図 5.1 のようになる.

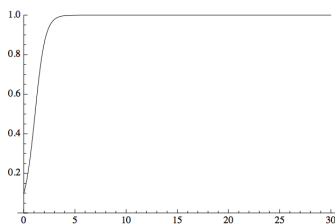


図 5.1: Logistic 方程式の解の挙動

Logistic 方程式の離散化として, ここでは次の 3 種類を考える.<sup>2</sup>

(1) 前進差分 (Logistic 写像):  $\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_n)$

(2) 中心差分:  $\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = au_n(1 - u_n)$

<sup>1</sup>本稿では, 「離散化」と「差分化」という 2 つの表現を用いているが, 同じ意味だと思っていただきたい.

<sup>2</sup>もちろん他にも考えられる.

(3) 可積分差分 [19, 25]:  $\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_{n+1})$

それぞれの差分方程式に基づいてグラフをプロットすると、解の挙動が異なることが分かる (図 5.2)。(1), (2) では微分方程式の場合 (図 5.1) とは異なる挙動であるが, (3) は解の構造を保っており, よい離散化であるといえる。<sup>3</sup>

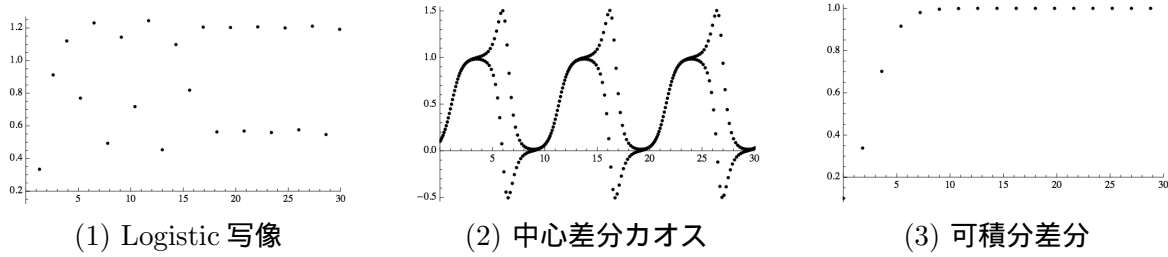


図 5.2: 種々の離散 Logistic 方程式の解の挙動

「可積分差分」(3) は, Logistic 方程式 (5.1) が線形化できることから導出される。以下に Logistic 方程式の離散化に関するスキームをまとめておく。

$$\begin{array}{ccc}
 u_t = au(1 - u) & \xrightarrow{\text{離散化}} & \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_{n+1}) \\
 f = \frac{1}{u} - 1 \Leftrightarrow u = \frac{1}{1+f} \downarrow & & \uparrow f_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{1+f_n} \\
 f_t = af: \text{線形方程式} & \xrightarrow{\text{離散化}} & \frac{f_n - f_{n-1}}{h} = -af_n \\
 (f = Ce^{-at}: \text{一般解}) & & (f_n = C(1 + ah)^{-n}: \text{一般解})
 \end{array}$$

図 5.3: Logistic 方程式の離散化

例 5.2 (Burgers 方程式). もう 1 つの例として, Burgers 方程式

$$u_t = uu_x + \nu u_{xx} \quad (\nu > 0) \tag{5.6}$$

を扱う。この偏微分方程式も,

$$u = 2\nu (\log f)_x \tag{5.7}$$

という変数変換 (Cole-Hopf 変換) によって, 次の線形方程式 (熱方程式) に帰着される。

$$f_t = \nu f_{xx} \tag{5.8}$$

線形偏微分方程式 (5.8) は

$$f = 1 + \sum_{i=1}^N \exp(p_i x + \nu p_i^2 y) \tag{5.9}$$

という形の解を持つ。この解は Burgers 方程式の“衝撃波解”に対応する。

以上の線形化の議論に基づいて, Burgers 方程式 (5.6) の離散化を行ってみよう。まず, (5.8) の離散化として, 次のもの考えてみる:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_n^{t+1} - f_n^t}{\delta} &= \nu \frac{f_{n+1}^t - 2f_n^t + f_{n-1}^t}{\varepsilon^2} \\
 \Leftrightarrow f_n^{t+1} &= \alpha (f_{n+1}^t + f_{n-1}^t) + (1 - 2\alpha) f_n^t \quad \left( \alpha = \frac{\nu\delta}{\varepsilon^2} \right). \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

<sup>3</sup> 「可積分差分」の方程式は森下の論文 [19] に記載されているので「森下差分」と呼ばれることもある。Skellam の論文 [25] でも, 同じ差分方程式が “discrete logistic growth” という名称で扱われている ([25], 4.3 節)。

この方程式を満たす  $f_n^t$  に対して,  $u_n^t$  を

$$u_n^t = \gamma \frac{f_{n+1}^t}{f_n^t} \quad (\gamma: \text{定数}) \quad (5.11)$$

として定めると,  $u_n^t$  は次の偏差分方程式を満たすことが示される:

$$\frac{u_n^{n+1}}{u_{n-1}^t} = \frac{1 + \frac{1-2\alpha}{\alpha\gamma^2}u_n^t + \frac{1}{\gamma^2}u_n^t u_{n+1}^t}{1 + \frac{1-2\alpha}{\alpha\gamma^2}u_{n-1}^t + \frac{1}{\gamma^2}u_n^t u_{n-1}^t} \quad (5.12)$$

方程式 (5.12) を, 離散 Burgers 方程式という [20].

離散 Burgers 方程式 (5.12) の導出スキームをまとめておこう.

$$\begin{array}{ccc} u_t = uu_x + \nu u_{xx}, (\nu > 0) & \xrightarrow{\text{離散化}} & \frac{u_n^{t+1}}{u_{n-1}^t} = \frac{1 + \frac{1-2\alpha}{\alpha\gamma^2}u_n^t + \frac{1}{\gamma^2}u_n^t u_{n+1}^t}{1 + \frac{1-2\alpha}{\alpha\gamma^2}u_{n-1}^t + \frac{1}{\gamma^2}u_n^t u_{n-1}^t} \\ u = 2\nu(\log f)_x \downarrow & & \uparrow u_n^t = \gamma \frac{f_{n+1}^t}{f_n^t} \\ f_t = \nu f_{xx} & \xrightarrow{\text{離散化}} & \frac{f_n^{t+1} - f_n^t}{\delta} = \nu \frac{f_{n+1}^t - 2f_n^t + f_{n-1}^t}{\varepsilon} \end{array}$$

図 5.4: Burgers 方程式の離散化

問 5.1. 上のスキームの計算をフォローせよ.

## 5.2 2次元戸田格子方程式の離散化

今度は, 2次元戸田格子方程式

$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n} \quad (5.13)$$

の離散化を考えよう [12, 27]. この方程式は (5.7) のような変数変換を行っても線形化はされないが, “双線形化” を行うことができる. まず,

$$e^{r_n} = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \quad (5.14)$$

とおけば,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\log \tau_{n+1} + \log \tau_{n-1} - 2 \log \tau_n) = \frac{\tau_{n+2}\tau_n}{\tau_{n+1}^2} + \frac{\tau_n\tau_{n-2}}{\tau_{n-1}^2} - 2 \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \quad (5.15)$$

という方程式が得られる. 両辺を比較すると,  $\tau_n$  が

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \tau_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} - 1 \quad (5.16)$$

を満たせば, (5.15) が成立することが分かる (十分条件). ただし, (5.16) において, 右辺の “-1” は  $n$  によらない任意の項に置き換えてよい. これを書き換えると,

$$\begin{aligned} (5.16) &\Leftrightarrow (\tau_n)_{xy}\tau_n - (\tau_n)_x(\tau_n)_y = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる. (5.17) が 2次元戸田格子方程式の双線形形式である

命題 5.1. 双線形方程式 (5.17) は、次の形の行列式解を持つ:

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\partial_x f_n^{(i)} = f_{n+1}^{(i)}, \quad \partial_y f_n^{(i)} = -f_{n-1}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5.19)$$

証明. (5.18) の行列式を

$$\tau_n = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1}| \quad (5.20)$$

で表す. この記法を用いると,

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= |\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{N-1}, \mathbf{N}|, \\ \tau_{n-1} &= |-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{N-2}|, \\ \partial_x \tau_n &= |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N}|, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$-\partial_y \tau_n = |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1}|,$$

$$-(\partial_x \partial_y + 1) \tau_n = |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N}|,$$

等と表される. 次に, 恒等的に 0 である行列式

$$0 = \left| \begin{array}{ccc|ccc|cc} -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{N-2} & & & & & & \\ \hline & & & & \emptyset & & & \mathbf{N-1} & \mathbf{N} & \\ \hline -\mathbf{1} & & & \emptyset & & & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{N-2} & \\ \hline & & & & & & & & & \mathbf{N-1} & \mathbf{N} \end{array} \right| \quad (5.22)$$

において, 右辺をラプラス展開して, 微分公式 (5.21) を用いると,

$$\begin{aligned} 0 &= |-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{N-2}| \times |\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1}, \mathbf{n}| \\ &\quad + |\mathbf{0}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1}| \times |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N}| \\ &\quad - |\mathbf{0}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N}| \times |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1}| \\ &= \tau_{n-1} \tau_{n+1} + \tau_n (-(\partial_x \partial_y + 1) \tau_n) - \partial_x \tau_n \times (-\partial_y \tau_n) \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる. すなわち, (5.18) の  $\tau_n(x, y)$  が (5.17) を満たすことが示された.  $\square$

行列式解 (5.18) の  $\tau_n(x, y)$  において, 行列式の成分は線形方程式を満たしている. そこで, 行列式 (5.18) の構造を変えずに, 要素の満たす線形関係式 (5.19) を離散化することを考える.

$$\tau_n(l, m) = \begin{vmatrix} f_n^{(1)}(l, m) & f_{n+1}^{(1)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)}(l, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^{(N)}(l, m) & f_{n+1}^{(N)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)}(l, m) \end{vmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\begin{cases} \Delta_{-l} f_n^{(i)}(l, m) = \frac{f_n^{(i)}(l, m) - f_n^{(i)}(l-1, m)}{a_{l-1}} = f_{n+1}^{(i)}(l, m), \\ \Delta_{-m} f_n^{(i)}(l, m) = \frac{f_n^{(i)}(l, m) - f_n^{(i)}(l, m-1)}{b_{m-1}} = -f_{n-1}^{(i)}(l, m). \end{cases} \quad (5.25)$$

(5.24) の  $\tau_n(l, m)$  を

$$\tau_n(l, m) = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N-2}, \mathbf{N-1}| \quad (5.26)$$

と表すことにして, 離散変数  $l, m$  をシフトした際にどのような行列式が現れるかを調べよう.

補題 5.1 (差分公式). (5.24) の  $\tau_n(l, m)$  は次を満たす:

$$\begin{aligned}
\tau_n(l+1, m) &= |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}, (\mathbf{N}-\mathbf{1})_{l+1}|, \\
a_l \tau_n(l+1, m) &= |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}, (\mathbf{N}-\mathbf{2})_{l+1}|, \\
\tau_n(l, m+1) &= |\mathbf{0}_{m+1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}, \mathbf{N}-\mathbf{1}|, \\
-b_m \tau_n(l, m+1) &= |\mathbf{1}_{m+1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}, \mathbf{N}-\mathbf{1}|, \\
(1+a_l b_m) \tau_n(l+1, m+1) &= |\mathbf{0}_{m+1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}, (\mathbf{N}-\mathbf{1})_{l+1}|.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

ただし,  $j = 1, 2, \dots$  に対して,

$$\mathbf{j}_{l+1} = \begin{bmatrix} f_n^{(1)}(l+1, m) \\ \vdots \\ f_n^{(N)}(l+1, m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}_{m+1} = \begin{bmatrix} f_n^{(1)}(l, m+1) \\ \vdots \\ f_n^{(N)}(l, m+1) \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

等の記法を用いている.

証明. まず, (5.25) より,

$$\mathbf{j}_{l+1} = \mathbf{j}_l + a_l (\mathbf{j} + \mathbf{1})_{l+1} \quad (j = 1, 2, \dots) \tag{5.29}$$

が成り立つことを注意しておく. これを用いると,

$$\begin{aligned}
\tau(l+1, m) &= |\mathbf{0}_{l+1}, \mathbf{1}_{l+1}, \dots, (\mathbf{N}-\mathbf{1})_{l+1}| \\
&= |\mathbf{0}_l + a_l \cdot \mathbf{1}_{l+1}, \mathbf{1}_{l+1}, \dots, (\mathbf{N}-\mathbf{1})_{l+1}| \\
&= |\mathbf{0}_l, \mathbf{1}_{l+1}, \dots, (\mathbf{N}-\mathbf{1})_{l+1}| \\
&= \dots\dots\dots \\
&= |\mathbf{0}_l, \dots, (\mathbf{N}-\mathbf{2})_l, (\mathbf{N}-\mathbf{1})_{l+1}|
\end{aligned} \tag{5.30}$$

となり, (5.27) の 1 番目の式が証明された. さらに, 今得られた式の両辺に  $a_l$  を掛けてから (5.29) を用いると,

$$\begin{aligned}
a_l \tau(l+1, m) &= |\mathbf{0}_l, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}_l, a_l (\mathbf{N}-\mathbf{1})_{l+1}| \\
&= |\mathbf{0}_l, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}_l, (\mathbf{N}-\mathbf{2})_{l+1} - (\mathbf{N}-\mathbf{2})_l| \\
&= |\mathbf{0}_l, \dots, \mathbf{N}-\mathbf{2}_l, (\mathbf{N}-\mathbf{2})_{l+1}|
\end{aligned} \tag{5.31}$$

となり, (5.27) の 2 番目の式が得られる. 3 番目, 4 番目の式については,

$$\mathbf{j}_{m+1} = \mathbf{j}_m - b_m (\mathbf{j} - \mathbf{1})_{m+1} \quad (j = 1, 2, \dots) \tag{5.32}$$

を用いて, 上と同様の計算を行えばよい.

(5.27) の最後の式を証明するための準備として, (5.25) より得られる

$$\Delta_{-l} \Delta_{-m} f_n^{(i)}(l, m) = -f_n^{(i)}(l, m) \tag{5.33}$$

を書き換えておこう.

$$\begin{aligned}
(5.33) \Leftrightarrow & \frac{f_n^{(i)}(l, m) - f_n^{(i)}(l, m-1) - f_n^{(i)}(l-1, m) + f_n^{(i)}(l-1, m-1)}{a_{l-1} b_{m-1}} = -f_n^{(i)}(l, m) \\
\Leftrightarrow & (1+a_l b_m) f_n^{(i)}(l+1, m+1) = f_n^{(i)}(l+1, m) + f_n^{(i)}(l, m+1) - f_n^{(i)}(l, m) \\
& = f_n^{(i)}(l+1, m) - b_m f_{n-1}^{(i)}(l, m+1) \\
\Leftrightarrow & (1+a_l b_m) \mathbf{j}_{l+1, m+1} = \mathbf{j}_{l+1} - b_m (\mathbf{j} - \mathbf{1})_{m+1}
\end{aligned} \tag{5.34}$$



(5.30) の結果において  $m \rightarrow m + 1$  として  $1 + a_l b_m$  を掛けてから (5.34) を用いると ,

$$\begin{aligned}
(1 + a_l b_m) \tau_n(l + 1, m + 1) &= |\mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N - 2)_{m+1}, (1 + a_l b_m)(N - 1)_{l+1}| \\
&= |\mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N - 2)_{m+1}, (N - 1)_{l+1} - b_m(N - 2)_{m+1}| \\
&= |\mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N - 2)_{m+1}, (N - 1)_{l+1}| \tag{5.35}
\end{aligned}$$

と書き換えられる . さらに , (5.32) を用いれば ,

$$\begin{aligned}
(5.35) &= |\mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N - 3)_{m+1}, \underline{(N - 2)_{m+1}}, (N - 1)_{l+1}| \\
&= |\mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N - 3)_{m+1}, \underline{(N - 2)_m - b_m(N - 3)_{m+1}}, (N - 1)_{l+1}| \\
&= |\mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N - 3)_{m+1}, \underline{(N - 2)_m}, (N - 1)_{l+1}| \\
&= \dots \dots \dots \\
&= |\mathbf{0}_{m+1}, \mathbf{1}, \dots, N - 2, (N - 1)_{l+1}| \tag{5.36}
\end{aligned}$$

となり , (5.27) の最後の式が証明された . □

命題 5.2. (5.24) の  $\tau_n(l, m)$  は次を満たす:

$$\begin{aligned}
(1 + a_l b_m) \tau_n(l + 1, m + 1) \tau_n(l, m) - \tau_n(l + 1, m) \tau_n(l, m + 1) \\
= a_l b_m \tau_{n+1} \tau_{n+1}(l + 1, m) \tau_{n-1}(l, m - 1). \tag{5.37}
\end{aligned}$$

証明. 次の , 恒等的に 0 である行列式を考える .

$$0 = \begin{vmatrix} \mathbf{0}_{m+1} & \mathbf{0}, \dots, N - 2 & \emptyset & N - 1, N - 1_{l+1} \\ \mathbf{0}_{m+1} & \emptyset & \mathbf{1}, \dots, N - 2 & N - 1, N - 1_{l+1} \end{vmatrix} \tag{5.38}$$

右辺を Laplace 展開して , 差分公式 (5.27) を用いると ,

$$\begin{aligned}
0 &= |\mathbf{0}_{m+1}, \mathbf{0}, \dots, N - 2| \times |\mathbf{1}, \dots, N - 2, N - 1, N - 1_{l+1}| \\
&\quad + |\mathbf{0}, \dots, N - 2, N - 1| \times |\mathbf{0}_{m+1}, \mathbf{1}, \dots, N - 2, N - 1_{l+1}| \\
&\quad - |\mathbf{0}, \dots, N - 2, N - 1_{l+1}| \times |\mathbf{0}_{m+1}, \mathbf{1}, \dots, N - 2, N - 1| \\
&= -b_m \tau_{n-1}(l, m + 1) \times a_l \tau_{n+1}(l + 1, m) \\
&\quad + \tau_n(l, m) \times (1 + a_l b_m) \tau_n(l + 1, m + 1) - \tau_n(l + 1, m) \times \tau_n(l, m + 1) \tag{5.40}
\end{aligned}$$

となるので , (5.37) が示された . □

命題 5.2 の方程式が , 双線形形式での離散 2 次元戸田方程式である . ここからどのようにして (5.13) に対応するような非線形方程式を導くかが問題である . 今の場合 ,

$$W_n(l, m) = \frac{\tau_{n+1}(l + 1, m) \tau_{n-1}(l, m + 1)}{\tau_n(l + 1, m) \tau_n(l, m + 1)} \tag{5.41}$$

と定めた上で , (5.37) の両辺を  $\tau_n(l + 1, m) \tau_n(l, m + 1)$  で割ると ,

$$(1 + a_l b_m) \frac{\tau_n(l + 1, m + 1) \tau_n(l, m)}{\tau_n(l + 1, m) \tau_n(l, m + 1)} = 1 + a_l b_m W_n(l, m) \tag{5.42}$$

となる。(5.41)の左辺の添字のずれ方に注目して、 $\frac{(5.42)_{n+1}(5.42)_{n-1}}{(5.42)_{l+1}(5.42)_{m+1}}$  という比をとると、次の方程式が得られる:

$$\frac{W_n(l+1, m+1)W_n(l, m)}{W_n(l+1, m)W_n(l, m+1)} = \frac{[1 + a_{l+1}b_m W_{n+1}(l+1, m)][1 + a_l b_{m+1} W_{n-1}(l, m+1)]}{[1 + a_{l+1}b_m W_n(l+1, m)][1 + a_l b_{m+1} W_n(l, m+1)]}. \quad (5.43)$$

さらに、

$$W_n(l, m) = e^{R_n(l, m)}, \quad 1 + a_l b_m W_n(l, m) = e^{F_n(l, m)} \quad (5.44)$$

とおけば、次の形に書き換えられる:

$$\begin{aligned} \Delta_{+l}\Delta_{+m}R_n(l, m) &= \frac{1}{a_l b_m} [F_{n+1}(l+1, m) + F_{n-1}(l, m+1) - F_n(l+1, m) - F_n(l, m+1)], \\ F_n(l, m) &= \log [1 + a_l b_m e^{R_n(l, m)}]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

この方程式が離散2次元戸田格子方程式(の1つの形)であり、連続極限  $a_l, b_m \rightarrow 0$  の下で、元の2次元戸田格子方程式(5.13)と対応する。

本節の最後に、離散2次元戸田格子方程式(5.45)を導いた議論を模式的にまとめておこう。

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} + e^{r_{n-1}} - 2e^{r_n} & \longrightarrow & \Delta_l \Delta_m R_n(l, m) = \frac{1}{a_l b_m} [F_{n+1}(l+1, m) + F_{n-1}(l, m-1) \\ & & - F_n(l+1, m) - F_n(l, m+1)] \\ e^{r_n} = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \downarrow & & \uparrow e^{R_n(l, m)} = \frac{\tau_{n+1}(l+1, m)\tau_{n-1}(l, m+1)}{\tau_n(l+1, m)\tau_n(l, m+1)} \\ (\tau_n)_{xy}\tau_n - (\tau_n)_x(\tau_n)_y & & \tau_n(l+1, m+1)\tau_n(l, m) - \tau_n(l+1, m)\tau_n(l, m+1) \\ = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 & & = a_l b_m \tau_{n+1}(l+1, m)\tau_{n-1}(l, m+1) \\ & & - a_0 b_m \tau_n(l+1, m+1)\tau_n(l, m) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tau_n = \det \left( f_{n+j-1}^{(i)} \right) & \longrightarrow & \tau_n = \det \left( f_{n+j-1}^{(i)}(l, m) \right) \\ \begin{cases} \partial_x f_n^{(i)} = f_{n+1}^{(i)} \\ \partial_y f_n^{(i)} = -f_{n-1}^{(i)} \end{cases} & & \begin{cases} \Delta_{-l} f_n^{(i)} = f_{n+1}^{(i)} \\ \Delta_{-m} f_n^{(i)} = -f_{n-1}^{(i)} \end{cases} \end{array}$$

図 5.5: 2次元戸田格子方程式の離散化

## 第6章 離散曲線の等周変形の明示公式

本章では、「離散曲線の明示公式」を紹介する [8] . まずは, 第4章で用いた離散曲線に対する関係式の復習をしておく .

$$\gamma_n^m = \begin{bmatrix} X_n^m \\ Y_n^m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 (\simeq \mathbf{C}), \quad (6.1)$$

$$\frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_n^m \\ \sin \Psi_n^m \end{bmatrix}, \quad \Psi_n^m = \frac{\Theta_{n+1}^m - \Theta_n^m}{2}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} = R(K_n^m) \frac{\gamma_n^m - \gamma_{n-1}^m}{a_{n-1}}, \quad K_n^m = \frac{\Theta_{n+1}^m - \Theta_{n-1}^m}{2}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} = R(W_n^m) \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n}, \quad W_n^m = \frac{\Theta_{n+1}^{m+1} - \Theta_{n+1}^m}{2}, \quad (6.4)$$

$$\tan \frac{\Theta_{n+1}^{m+1} - \Theta_n^m}{4} = \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \frac{\Theta_{n+1}^{m+1} - \Theta_{n+1}^m}{4}. \quad (6.5)$$

定理 6.1. 関数  $\tau_n^m$  は次の双線形方程式を満たすものとする .

$$D_y \tau_{n+1}^m \cdot \tau_n^m = -a_n (\tau_{n+1}^m)^* (\tau_n^m)^*, \quad (6.6)$$

$$D_y \tau_n^{m+1} \cdot \tau_n^m = -b_m (\tau_n^{m+1})^* (\tau_n^m)^* \quad (6.7)$$

$$b_m (\tau_n^{m+1})^* \tau_{n+1}^m - a_n (\tau_{n+1}^m)^* \tau_n^{m+1} + (a_n - b_m) (\tau_{n+1}^{m+1})^* \tau_n^m = 0. \quad (6.8)$$

ただし, “\*” は複素共役を表す . このとき, 関数  $\Theta_n^m$  と  $\gamma_n^m$  を

$$\Theta_n^m = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau_n^m}{(\tau_n^m)^*}, \quad \gamma_n^m = \begin{bmatrix} X_n^m \\ Y_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (\log \tau_n^m (\tau_n^m)^*)_y \\ \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left( \log \frac{\tau_n^m}{(\tau_n^m)^*} \right)_y \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

によって定めると, (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) がすべて満たされる .

定理 6.2.  $\tau_n^m$  を

$$\tau_n^m = \exp \left[ - \left( \sum_{\nu}^{n-1} a_{\nu} + \sum_{\mu}^{m-1} b_{\mu} \right) y \right] \det \left[ f_{j-1}^{(i)}(n, m) \right]_{1 \leq i, j \leq N}, \quad (6.10)$$

$$\begin{cases} f_k^{(i)}(n, m) = \alpha_i p_i^k e^{n_i} + \beta_i (-p_i)^k e^{\xi_i}, \\ e^{n_i} = \prod_{\nu_1}^{n-1} (1 - a_{\nu_1} p_i)^{-1} \prod_{\mu_1}^{m-1} (1 - b_{\mu_1} p_i)^{-1} \exp \left( \frac{1}{p_i} y \right), \\ e^{\xi_i} = \prod_{\nu_2}^{n-1} (1 - a_{\nu_2} (-p_i))^{-1} \prod_{\mu_2}^{m-1} (1 - b_{\mu_2} (-p_i))^{-1} \exp \left( -\frac{1}{p_i} y \right), \end{cases} \quad (6.11)$$

によって定めると, (6.6), (6.7), (6.8) を満たす . ただし, パラメータ  $\alpha_i, \beta_i, p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) は以下のどちらかの条件を満たすものとする:

- $N$ -ソリトン解:  $\alpha_i, p_i \in \mathbf{R}, \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbf{R} (i = 1, 2, \dots, N)$
- $M$ -ブリーザー解 ( $N = 2M$ ):  $\alpha_i, \beta, p_i \in \mathbf{C} (i = 1, 2, \dots, N), \alpha_{2k} = \alpha_{2k-1}^*, \beta_{2k} = -\beta_{2k-1}^*, p_{2k} = p_{2k-1}^* (k = 1, \dots, M).$

注 6.1.  $F_n$  を

$$F_n = \prod_{\nu_1}^{n-1} (1 - a_{\nu_1} p_i) = (1 - a_{n-1} p_i)^{-1} (1 - a_{n-2} p_i)^{-1} \cdots \quad (6.12)$$

によって定めると,

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= \{(1 - a_{n-1} p_i)^{-1} (1 - a_{n-2} p_i)^{-1} \cdots\} - \{(1 - a_{n-2} p_i)^{-1} (1 - a_{n-3} p_i)^{-1} \cdots\} \\ &= \{(1 - a_{n-1} p_i)^{-1} (1 - a_{n-2} p_i)^{-1} \cdots\} \{1 - (1 - a_{n-1} p_i)\} \\ &= F_n \times a_{n-1} p_i \end{aligned} \quad (6.13)$$

となるので,  $F_n$  が

$$\frac{F_n - F_{n-1}}{a_{n-1}} = p_i F_n \quad (6.14)$$

を満たしていることが分かる. よって, (6.11) の  $f_k^{(i)}(n, m)$  は, 線形差分方程式

$$\frac{f_k^{(i)}(n, m) - f_k^{(i)}(n-1, m)}{a_{n-1}} = f_{k+1}^{(i)}(n, m), \quad \frac{f_k^{(i)}(n, m) - f_k^{(i)}(n, m-1)}{b_{m-1}} = f_{k+1}^{(i)}(n, m) \quad (6.15)$$

を満たす.

注 6.2. パラメータ  $\{a_n\}$  が  $n$  によらず一定であり  $a_n = a$  である場合には, (6.14) の  $F_n = (1 - ap_i)^{-n}$  としてよい.

定理 6.2 の証明の準備として, (6.11) の  $f_k^{(i)}(n, m)$  を用いて,  $\sigma_n^m(k)$  を

$$\sigma_n^m(k) = \det \left[ f_{k+j-1}^{(i)}(n, m) \right]. \quad (6.16)$$

として定める. (6.10) の  $\tau_n^m(k)$  とは

$$\sigma_n^m(k) = \exp \left[ \left( \sum_{\nu}^{n-1} a_{\nu} + \sum_{\mu}^{m-1} b_{\mu} \right) y \right] \tau_n^m(k) \quad (6.17)$$

という関係がある.

補題 6.1 (差分公式).  $\sigma_n^m(k)$  を

$$\sigma_n^m(k) = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, \mathbf{N} - \mathbf{1}| \quad (6.18)$$

として表すと, 添字をずらしたものは以下のように表される:

$$\begin{cases} \sigma_{n+1}^m(k) = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, (\mathbf{N} - \mathbf{1})_{n+1}|, \\ a_n \sigma_{n+1}^m(k) = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, (\mathbf{N} - \mathbf{2})_{n+1}|, \\ \sigma_n^{m+1}(k) = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, (\mathbf{N} - \mathbf{1})_{m+1}|, \\ b_m \sigma_n^{m+1}(k) = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{2}, (\mathbf{N} - \mathbf{2})_{n+1}|, \\ (a_n - b_m) \sigma_{n+1}^{m+1}(k) = |\mathbf{0}, \dots, \mathbf{N} - \mathbf{3}, (\mathbf{N} - \mathbf{2})_{m+1}, (\mathbf{N} - \mathbf{2})_{n+1}|. \end{cases} \quad (6.19)$$

証明. (6.15) より得られる

$$\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k} + a_n(\mathbf{k} + \mathbf{1})_{n+1}, \quad \mathbf{k}_{m+1} = \mathbf{k} + b_m(\mathbf{k} + \mathbf{1})_{m+1} \quad (6.20)$$

を用いれば, 第1式~第4式は第5章と同様の議論により示される. 最後の式を示すための準備として, (6.15) より,

$$\begin{aligned} \frac{f_k^{(i)}(n+1, m+1) - f_k^{(i)}(n, m+1)}{a_n} &= \frac{f_k^{(i)}(n+1, m+1) - f_k^{(i)}(n+1, m)}{b_m} \\ \Leftrightarrow (a_n - b_m)f_k^{(i)}(n+1, m+1) &= a_n f_k^{(i)}(n+1, m) - b_m f_k^{(i)}(n, m+1) \\ \Leftrightarrow (a_n - b_m)\mathbf{k}_{n+1} &= a_n \mathbf{k}_{n+1} - b_m \mathbf{k}_{m+1} \end{aligned} \quad (6.21)$$

が得られる. (6.19) の第2式で  $m \rightarrow m+1$  としたものに  $(a_n - b_m)$  をかけると,

$$\begin{aligned} a_n(a_n - b_m)\sigma_{n+1}^{m+1} &= \left| \mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N-2)_{m+1}, (a_n - b_m)(N-2)_{n+1} \right| \\ &\stackrel{(6.21)}{=} \left| \mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N-2)_{m+1}, a_n(N-2)_{n+1} - b_m(N-2)_{m+1} \right| \\ &= a_n \left| \mathbf{0}_{m+1}, \dots, (N-2)_{m+1}, (N-2)_{n+1} \right| \end{aligned} \quad (6.22)$$

となる. 両辺を  $a_n$  で割ってさらに変形すると,

$$\begin{aligned} (a_n - b_m)\sigma_{n+1}^{m+1} &= \left| \mathbf{0}_{m+1}, \mathbf{1}_{m+1}, \dots, (N-2)_{m+1}, (N-2)_{n+1} \right| \\ &\stackrel{(6.20)}{=} \left| \mathbf{0} + b_m \mathbf{1}_{m+1}, \mathbf{1}_{m+1}, \dots, (N-2)_{m+1}, (N-2)_{n+1} \right| \\ &= \left| \mathbf{0}, \mathbf{1}_{m+1}, \dots, (N-2)_{m+1}, (N-2)_{n+1} \right| \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \left| \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-3, (N-2)_{m+1}, (N-2)_{n+1} \right| \end{aligned} \quad (6.23)$$

となり, (6.19) の最後の式が示された.  $\square$

補題 6.2 (微分・差分公式). (6.16) の  $\sigma_n^m(k)$  は以下を満たす:

$$\begin{cases} \partial_y \sigma_n^m = |-1, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1|, \\ a_n (\partial_y - a_n) \sigma_{n+1}^m = |-1, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-2)_{n+1}|. \end{cases} \quad (6.24)$$

証明. (6.11) の  $f_k^{(i)}(n, m)$  は  $\partial_y f_k^{(i)} = f_{k-1}^{(i)}$  を満たし,

$$\partial_y \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{1} \quad (6.25)$$

となるので, (6.24) の第1式が得られる. 次に, (6.19) の第2式を  $y$  で微分して (6.20) を用いると,

$$\begin{aligned} a_n \partial_y \sigma_{n+1}^m &= |-1, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-2)_{n+1}| + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-3)_{n+1}| \\ &\stackrel{(6.20)}{=} \left| -1, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-2)_{n+1} \right| \\ &\quad + \left| \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-3) + a_n(N-2)_{n+1} \right| \\ &= \left| -1, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-2)_{n+1} \right| + a_n \left| \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-2)_{n+1} \right| \\ &= \left| -1, \mathbf{1}, \dots, N-2, (N-2)_{n+1} \right| + a_n^2 \sigma_{n+1}^m \end{aligned} \quad (6.26)$$

が得られる. 右辺第2項を移項すれば, (6.24) の第2式が得られる.  $\square$

補題 6.3 (簡約条件と実数条件). (6.16) の  $\sigma_n^m(k)$  は次を満たす:

$$\sigma_n^m(k+2) \simeq \sigma_n^m(k), \quad \sigma_n^m(k+1) \simeq (\sigma_n^m(k))^*. \quad (6.27)$$

証明は, 第 2 章の命題 2.9, 命題 2.8 と同様にすればよい.

問 6.1. 補題 6.3 を証明せよ.

定理 6.2 の証明. 次の恒等的に 0 である行列式から出発する:

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & | & \mathbf{0}, 1, \dots, N-2 & | & \emptyset & | & (N-2)_{n+1}, N-1 \\ \hline -1 & | & \emptyset & | & \mathbf{1}, \dots, (N-2) & | & (N-2)_{n+1}, N-1 \end{vmatrix}. \quad (6.28)$$

右边を Laplace 展開してから (6.19), (6.24) を用いると,

$$\begin{aligned} 0 &= |-1, \mathbf{0}, \dots, N-2| \times |\mathbf{1}, \dots, N-2, N-2_{n+1}, N-1| \\ &\quad + |\mathbf{0}, \dots, N-2, N-2_{n+1}| \times |-1, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| \\ &\quad - |\mathbf{0}, \dots, N-2, N-1| \times -|-1, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-2_{n+1}| \\ &= \sigma_n^m(k-1) \cdot (-a_n^2 \sigma_{n+1}^m(k+1)) + a_n \sigma_{n+1}^m(k) \cdot \partial_y \sigma_n^m(k) - \sigma(k) \cdot a_n (\partial_y - a_n) \sigma_{n+1}^m(k) \end{aligned} \quad (6.29)$$

これを整理すれば (6.6) が得られる. (6.7) については,  $n \leftrightarrow m$ ,  $a_n \leftrightarrow b_m$  と入れ替えるだけでよい.

次に,

$$0 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1 & | & \emptyset & | & (N-1)_{m+1}, (N-1)_{n+1} \\ \hline \mathbf{0} & | & \emptyset & | & \mathbf{1}, \dots, N-2 & | & (N-1)_{m+1}, (N-1)_{n+1} \end{vmatrix} \quad (6.30)$$

の右边を Laplace 展開すると,

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| \times |\mathbf{1}, \dots, N-2, N-1_{m+1}, N-1_{n+1}| \\ &\quad + |\mathbf{1}, \dots, N-2, N-1, N-1_{m+1}| \times |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1_{n+1}| \\ &\quad - |\mathbf{1}, \dots, N-2, N-1, N-1_{n+1}| \times |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1_{m+1}| \end{aligned} \quad (6.31)$$

となる. ここに差分公式 (6.19) を用いると, 次の双線形差分方程式が得られる:

$$b_m \sigma_n^{m+1}(k+1) \sigma_{n+1}^m(k) - a_n \sigma_{n+1}^m(k+1) \sigma_n^{m+1}(k) + (a_n - b_m) \sigma_{n+1}^{m+1}(k+1) \sigma_n^m(k) = 0. \quad (6.32)$$

さらに, (6.17) および実数条件 (6.27) により (6.8) が得られる.  $\square$

定理 6.1 の証明. (6.8) を  $(\tau_n^{m+1})^* (\tau_{n+1}^m)^*$  で割ると,

$$b_m \frac{\tau_{n+1}^m}{(\tau_{n+1}^m)^*} - a_n \frac{\tau_n^{m+1}}{(\tau_n^{m+1})^*} = -(a_n - b_m) \frac{(\tau_{n+1}^{m+1})^* \tau_n^m}{(\tau_n^{m+1})^* (\tau_{n+1}^m)^*} \quad (6.33)$$

が得られる. ここで (6.9) の第 1 式より  $\frac{\tau_n^m}{(\tau_n^m)^*} = \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \Theta_n^m\right)$  であるので,

$$b_m \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \Theta_{n+1}^m\right) - a_n \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \Theta_n^{m+1}\right) = -(a_n - b_m) \frac{(\tau_{n+1}^{m+1})^* \tau_n^m}{(\tau_n^{m+1})^* (\tau_{n+1}^m)^*} \quad (6.34)$$

が得られる. 次に, (6.8) の複素共役をとってから  $(\tau_n^{m+1})^* (\tau_{n+1}^m)^*$  で割ると, 次が得られる:

$$b_m \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \Theta_n^{m+1}\right) - a_n \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \Theta_{n+1}^m\right) = (a_n - b_m) \frac{\tau_{n+1}^{m+1} (\tau_n^m)^*}{(\tau_n^{m+1})^* (\tau_{n+1}^m)^*}. \quad (6.35)$$

(6.34), (6.35) を辺々割ると,

$$\frac{b_m \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Theta_{n+1}^{m+1}\right) - a_n \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Theta_{n+1}^m\right)}{b_m \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Theta_{n+1}^m\right) - a_n \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\Theta_{n+1}^{m+1}\right)} = \exp\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Theta_{n+1}^{m+1} - \Theta_n^m)\right] \quad (6.36)$$

となるが, これは離散 mKdV 方程式 (6.5) と等価である (問 6.2).

次に, (6.6) の両辺を  $\tau_{n+1}^m \tau_n^m$  で割ると,

$$\left(\log \frac{\tau_{n+1}^m}{\tau_n^m}\right)_y = -a_n \frac{(\tau_{n+1}^m)^* (\tau_n^m)^*}{\tau_{n+1}^m \tau_n^m} = \exp\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m)\right] \quad (6.37)$$

が得られる. この式の複素共役をとると

$$\left(\log \frac{(\tau_{n+1}^m)^*}{(\tau_n^m)^*}\right)_y = -a_n \frac{\tau_{n+1}^m \tau_n^m}{(\tau_{n+1}^m)^* (\tau_n^m)^*} = \exp\left[-\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m)\right] \quad (6.38)$$

となる. (6.37), (6.38) を辺々加えることで,

$$\left[\log \frac{\tau_{n+1}^m (\tau_{n+1}^m)^*}{\tau_n^m (\tau_n^m)^*}\right]_y = -a_n \left(\exp\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m)\right] + \exp\left[-\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m)\right]\right) \quad (6.39)$$

となるが, ここに (6.9) の第 2 式を用いれば,

$$\frac{X_{n+1}^m - X_n^m}{a_n} = \cos \frac{\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m}{2} = \cos \Psi_n^m \quad (6.40)$$

が得られる. また, 辺々を引くことで,

$$\frac{Y_{n+1}^m - Y_n^m}{a_n} = \sin \frac{\Theta_{n+1}^m - \Theta_n^m}{2} = \sin \Psi_n^m \quad (6.41)$$

となる. 以上で, (6.2) が示された.

また, (6.2) により,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m}{2} \\ \sin \frac{\Theta_{n+1}^m + \Theta_n^m}{2} \end{bmatrix} = R\left(\frac{\Theta_{n+1}^m - \Theta_{n-1}^m}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_n^m + \Theta_{n-1}^m}{2} \\ \sin \frac{\Theta_n^m + \Theta_{n-1}^m}{2} \end{bmatrix} \\ &= R(K_n^m) \frac{\gamma_n^m - \gamma_{n-1}^m}{a_{n-1}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

として (6.3) が導かれる.

同様に, (6.7) の両辺を  $\tau_n^{m+1} \tau_n^m$  で割ることで

$$\left(\log \frac{\tau_n^{m+1}}{\tau_n^m}\right)_y = -b_m \exp\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}(-\Theta_n^{m+1} - \Theta_n^m)\right], \quad (6.43)$$

$$\left(\log \frac{(\tau_n^{m+1})^*}{(\tau_n^m)^*}\right)_y = -b_m \exp\left[\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Theta_n^{m+1} + \Theta_n^m)\right] \quad (6.44)$$

が得られ,

$$\frac{X_n^{m+1} - X_n^m}{b_m} = \cos \frac{\Theta_n^{m+1} + \Theta_n^m}{2}, \quad \frac{Y_n^{m+1} - Y_n^m}{b_m} = \sin \frac{\Theta_n^{m+1} + \Theta_n^m}{2} \quad (6.45)$$

が導かれる. ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_n^{m+1} + \Theta_n^m}{2} \\ \sin \frac{\Theta_n^{m+1} + \Theta_n^m}{2} \end{bmatrix} = R\left(\frac{\Theta_n^{m+1} - \Theta_{n+1}^m}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos \frac{\Theta_n^m + \Theta_{n-1}^m}{2} \\ \sin \frac{\Theta_n^m + \Theta_{n-1}^m}{2} \end{bmatrix} \\ &= R(M_n^m) \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} \end{aligned} \quad (6.46)$$

となり, (6.4) が示された.  $\square$

問 6.2. (6.36) が離散 mKdV 方程式 (6.5) と等価であることを示せ .

問 6.3. 計算機 (Mathematica, Maple, Maxima 等) を用いて, 2-ソリトン解と 1-ブリーザー解に対応する離散曲線のグラフを描け .



## 関連図書

- [1] A.I. Bobenko and Y.B. Suris, *Discrete Differential Geometry: Integrable Structure*, Graduate Studies in Mathematics **98**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2008.
- [2] 広田良吾, 直接法による ソリトンの数理, 岩波書店 (1992).
- [3] 広田良吾, 差分方程式講義 — 連続より離散へ —, サイエンス社 (2000).
- [4] R. Hirota, Discretization of the potential modied KdV equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, no. 7 (1998), 2234–2236.
- [5] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations III. Discrete sine-Gordon equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 2079–2086.
- [6] T. Hoffmann, *Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces*, COE Lecture Note **18**, Kyushu University, Faculty of Mathematics, Fukuoka, 2009, Math-for-Industry Lecture Note Series.  
(<http://gcoe-mi.jp/temp/publish/217a739d5ac626a736cbf73949394d17.pdf>)
- [7] 井ノ口順一, 曲線とソリトン, 朝倉書店 (2010).
- [8] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, *Kyushu J. Math.* **66** (2011), 303–324.
- [9] 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012, 井ノ口順一・太田泰広・笈三郎・梶原健司・松浦望 編, MI Lecture Note Series, Vol. 40 (2012).  
(<http://hdl.handle.net/2324/25116>)
- [10] 伊理正夫, 一般線形代数, 岩波書店 (2003).
- [11] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili: On the stability of solitary waves in weakly dispersive media, *Sov. Phys. Dokl.* **15** (1970), pp. 539–541 (Translated from *Doklady Akademii Nauk SSSR* **192** (1970), pp. 753–756)
- [12] 梶原健司, 離散可積分系の基礎, [29] 所収.
- [13] 笈三郎, 離散可積分系入門, [9] 所収.  
(<https://qir.kyushu-u.ac.jp/dspace/bitstream/2324/25116/5/p025.pdf>)
- [14] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何学 (改訂版), 裳華房 (1995).
- [15] 松浦望, Discrete differential geometry of curves, [9] 所収.  
(<https://qir.kyushu-u.ac.jp/dspace/bitstream/2324/25116/7/p075.pdf>)
- [16] N. Matsuura, Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of discrete planar curves, *Int. Math. Res. Not.*, **2012(8)**, (2012), 1681–1698.

- [17] ロバート・ミウラ (梶原健司・及川正行 訳), ソリトンと逆散乱法: 歴史的視点から, (1) 数学セミナー (日本評論社) 2008 年 8 月号 32–38; (2) 9 月号 44–49.
- [18] 三輪哲二・神保道夫・伊達悦朗, ソリトンの数理, 岩波書店 (2007).
- [19] M. Morisita, The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density, *Res. Popul. Ecol.* **VII** (1965), 52–55.
- [20] K. Nishinari and D. Takahashi, Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 5439–5450.
- [21] S. Oishi, A method of analysing soliton equations by bilinearization, *J. Phys. Soc. Jpn.* **48** (1980), 639–646.
- [22] 佐武一郎, 線型代数学 (数学選書 1, 増補改訂版), 裳華房 (1974).
- [23] 佐藤幹夫 (述), 野海正俊 (記), ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学数学講究録 No.18, 上智大学数学教室 (1984).
- [24] J. Satsuma,  $N$ -soliton solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **40** (1976), 286–290.
- [25] J.G. Skellam, Random dispersal in theoretical populations, *Biometrika* **38** (1951), 196–218.
- [26] 高崎金久, 可積分系の世界 — 戸田格子とその仲間 —, 共立出版 (2001).
- [27] 辻本諭, 可積分系の離散化について, 可積分系の応用数理 (中村佳正 編, 裳華房, 2000) 所収.
- [28] 梅原雅顕・山田光太郎, 曲線と曲面 — 微分幾何的アプローチ —, 裳華房 (2002).
- [29] 若山正人 編, 可視化の技術と現代幾何学, 岩波書店 (2010).